Zins-Immunisierungsstrategien oder

Wie sichert man eine Million?

Hermann Kautschitsch
Institut für Mathematik
Universität Klagenfurt

Problemstellung

Sicherung einer Investition gegenüber unvermutet auftretenden Zinsänderungen (Zinsimmunisierung)

Jemand benötigt in 5 Jahren 1 000 000 €.
Marktzinssatz für 6 Jahre derzeit i = 4,5080%.

Sparbuch:

Investition von 802 144€. Dann hat man in 5 Jahren:
$802.144 \cdot 1{,}045080^5 = 1.000.000{,}05$€.
Allerdings: Zins ändert sich im allgemeinen !

Sinkt der Zins z.B auf i = 4,00%, dann hätte er in 5 Jahren nur
$802.144 \cdot 1{,}04^5 = 975.930{,}83$€.

Problemstellung

Anleihen (gesamtfällige Obligation):

Jährlich fixer Kupon (j% der Investition), Zinszahlungen (Zinsanleihe) am Ende der Laufzeit n : letzter Kupon + Investition K_0

Beispiel:

Anleihe A1: Kupon 5,5; Laufzeit 5Jahre; Kurs 104,353886

Kurs 104,30304 bedeutet: Für 100 Nominale (Nennwert) muss man 104,3043 € bezahlen.

Für 802144€ erhält man wie viele Nominale?

Problemstellung

104,353886 € ….. 100 Nominale
802.144€ ….. x Nominale
----
x = 100/104,353886*802144 = 768.676,65 Nominale

x = 100/Kurs * Investitionsvolumen

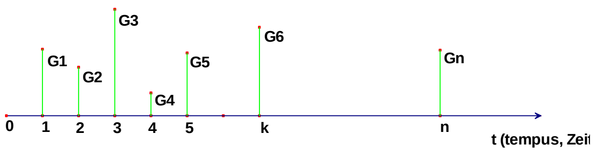
Dafür erhält man jährlich 768676,65* 0,055 = 42.277,22€ an Zinsen und zum Schluss noch die gesamte Investition von 768676,65, also im Schlussjahr insgesamt 810953,87€.

Was passiert, wenn der Zinssatz um 1% sinkt?

Wie viel sind in 5 Jahren diese Zahlungen wert?

Ist dies bei jeder Anleihe so?

Bezeichnungen



Sicherer Zahlungsstrom: $(G_1, G_2, \dots G_k, \dots G_n)$
Aufzinsungsfaktor: $r = 1+ i$
Aufzinsen: $K_n = K_0\,(1+I\,)^n = K_0\, r^n$
1 heute ist in n Jahren r^n wert
Abzinsungsfaktor: $v = 1/(1+i)$
Abzinsen: $K_0 = K_n\,(1/(1+i))^n = K_n\, v^n$
1 in n Jahren ist heute v^n wert
Barwert: $B = G_1 v^{1} + G_2 v^{2} + \dots + G_n v^n = \Sigma G_k v^k$
Wert zum Zeitpunkt t: $V(t) = \Sigma\, G_k r^{(t-k)}$

Experimentelle Beobachtungen und anschauliche Begründungen

Was kann verändert werden?

1. Experiment: Einfluss von Zinsänderungen Δi
Modellannahme: Zinssatzänderung unmittelbar nach Kauf

1. Beobachtung: Bar- und Endwerte ändern sich gegenläufig.

2. Experiment: Variiere Δi und die Kupons, beobachte die Wertverläufe V(t). Kontinuierliche Beschreibung

2. Beobachtung: Für jeden Zahlungsstrom existiert ein Zeitpunkt $t=t_D$, in dem der geplante Wert mit dem tatsächlich erreichten Wert V(t) übereinstimmt.

Der Zeitpunkt der Gleichwertigkeit t_D

Aus $\bar{v}(t_D) = V(t_D)$ folgt

$$B\,(1+i)^{t_D} = (B+\Delta B)\,(1+i+\Delta i)^{t_D}$$

$$\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)^{t_D} = \frac{B+\Delta B}{B}$$

Die gesuchte Variable befindet sich im Exponenten. Wir müssen also “logarithmieren” und erhalten die *Gleichgewichtsformel*:

$$t_D = \frac{\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right)}{\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)}$$

Der Zeitpunkt der Gleichwertigkeit t_D

Aus dem zweiten Experiment können wir ablesen, dass für diesen Gleichwertigkeitszeitpunkt tD folgende Beziehungen gelten:

- Steigt der Zinssatz ($\Delta i>0$), dann ist der geplante Wert vor dem Gleichgewichtszeitpunkt (also: t<tD) größer als der tatsächliche Wert V(t). Nach dem Gleichgewichtszeitpunkt (also: t>tD) ist der geplante Wert kleiner als der tatsächliche Wert.
- Fällt der Zinssatz ($\Delta i<0$), dann ist der geplante Wert vor dem Gleichgewichtszeitpunkt (also: t<tD) kleiner als der tatsächliche Wert und nach dem Gleichgewichtszeitpunkt größer.

Zeitpunkt der Gleichwertigkeit
Was ändert sich wie?

3. Experiment: Beobachte t_D für verschiedene Δi

1. Überraschung: Selbst relativ große Zinsänderungen, gleichgültig in welche Richtung, bewirken nur kleine Änderungen von t_D.

4. Experiment: Wann tritt t_D in Abhängigkeit von Δi ein ?

Zinsänderung Δi	t_D
+6%	4,6008
+1%	4,6251
$-1\% < \Delta i < +1\%$	………
-1%	4,6346
-3%	4,6440

2. Überraschung: Je mehr die Zinsen steigen, umso früher tritt t_D ein. Je mehr die Zinsen fallen, umso später tritt t_D ein.

Zinsunempfindlichkeit
Was bleibt invariant?

Beide überraschende Beobachtungen ermöglichen die Immunisierung:

5. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für -1% fest. Betrachte Zinsänderungen für $\Delta i < -1\%$ oder $\Delta i > +1\%$.

3. Beobachtung:

Für $\Delta i < -1\%$ oder $\Delta i > +1\%$ ist der geplante Wert zu $t = t_D$ immer kleiner als der tatsächliche Wert. Jede Zinsänderung, unabhängig von Richtung und Ausmaß, führt zu einem höheren Endwert.

Begründung: Wenn $\Delta i > +1\%$, dann tritt t_D für dieses Δi früher ein (2.Beob.).
Also ist das $t^* := t_D$ zu $\Delta i = -1\%$ ein späterer Zeitpunkt $\Longrightarrow V(t^*) >$ geplant.
Wenn $\Delta i < -1\%$, dann tritt t_D für dieses Δi später ein (2.Beob.).
Also ist das $t^* := t_D$ zu $\Delta i = -1\%$ ein früherer Zeitpunkt $\Longrightarrow V(t^*) >$ geplant.

Unsicherheitszone
Abändern von Bedingungen

Was passiert, wenn der Zins sich zwischen -1% und +1% ändert?

6. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für -1% fest.
Betrachte Zinsänderungen für $-1\% < \Delta i < +1\% \Leftrightarrow |\Delta i| < 1\%$

4. Beobachtung: Es kann passieren, dass der tatsächlich erzielte Wert (=blauer Wert) kleiner als der geplante Wert (=oranger Wert) ausfällt.

Unsicherheitszone
Abändern von Bedingungen

Strategie: Verkleinere die Unsicherheitszone:
$|\Delta i| < 0{,}1\%$, $|\Delta i| < 0{,}01\%$

5. Beobachtung: Bei $\Delta i \to 0$ scheint der Quotient t_D einen bestimmten Wert anzunehmen. Welchen? Ist er ausdrückbar durch gegebene Daten des Zahlungstromes?

- Für diesen Wert gilt jedenfalls: Zu diesem Zeitpunkt ist der geplante Wert eine untere Grenze, alle tatsächlich erreichten Werte, unabhängig von Größe und Richtung der Zinsänderung, liegen darüber.
  Das Zinsänderungsrisiko ist ausgeschaltet!

Einsatz der Analysis

$$\mathrm{B} + \Delta B = \mathrm{B}\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \text{ und } \frac{B+\Delta B}{B} = 1+\frac{\Delta B}{B}$$

1. LINEARISIERUNG: Linearisierung von Funktionen

$$\ln \frac{B+\Delta B}{B} = \ln\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \approx \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{i}}\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{B}}$$

Strategie: Wenn wir $\frac{\Delta B}{\Delta i}$ abschätzen könnten, dann wüssten wir auch, wie groß $\frac{\Delta B}{B}$ und damit auch $\ln\frac{B+\Delta B}{B}$ ist! Dann könnte man eine Formel für obigen unbestimmten Ausdruck angeben.

2.LINEARISIERUNG: Ersetze den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{i}} \approx \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{di}}$$

Aus der Summenregel und der Kettenregel erhalten wir für $\mathrm{B(i)} = \sum \mathrm{G_k v^k}$:

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{di}} = \sum \mathrm{kG_k v^{k-1}}(-\mathrm{v}^2) = (\sum \mathrm{kG_k v^k})\mathrm{v}\,.$$

Einsatz der Analysis
Feststellen einer Beziehung

Damit ist

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\mathrm{B}} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{i}}\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{B}} \approx \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{di}}\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{B}} = -\sum \mathrm{kG_k v^k}\,\mathrm{v}\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{B}}$$

oder:

$$\frac{\Delta B}{B} \approx -\frac{\sum \mathrm{kG_k v^k}}{\mathrm{B}}\mathrm{v}\,\Delta \mathrm{i}$$

***Definition1*: Der Ausdruck $\frac{\sum \mathrm{kG_k v^k}}{\mathrm{B}}$ heißt die Duration D des Zahlungsstromes (G_1, … , G_n).**

Mit dieser Definition erhalten wir für die relative Barwertänderung:

$$\boxed{\frac{\Delta B}{B} \approx -\mathrm{D}\,\mathrm{v}\,\Delta \mathrm{i}}$$

Anmerkung: Das negative Vorzeichen drückt die Gegenläufigkeit der Barwertänderung zur Zinsänderung aus.

Einsatz der Analysis
Deduktion

Bestimmung des Zeitpunktes der Gleichwertigkeit:

$$\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right)=\ln\left(\frac{B\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right)}{B}\right)=\ln\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right)\approx\frac{\Delta B}{B}\approx \text{-D v } \Delta i$$

$$\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)=\ln\left(1+\frac{-\Delta i}{1+i+\Delta i}\right)\approx\frac{-\Delta i}{1+i+\Delta i}$$

Damit ist

$$t_D=\frac{\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right)}{\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)}\approx\frac{-\mathrm{D\,v}\,\Delta \mathrm{i}\,(1+\mathrm{i}+\Delta \mathrm{i})}{-\Delta \mathrm{i}}=\text{-D v }(1+\mathrm{i}+\Delta\mathrm{i})$$

Wird Δi immer kleiner, dann nähert sich t_D dem Wert D v (1+i)=D.

Die feste Zahl in der Tabelle 4 ist gerade die Duration D des Zahlungsstromes.

Für diesen Zeitpunkt D gilt nach Beobachtung 5: $\overline{V}(D)\leq V(D)$

Immunisierende Eigenschaft der Duration

Zu jedem Zahlungsstrom(G_1, G_2, G_3, ... , G_n) gibt es einen Zeitpunkt, nämlich t =D, in dem der tatsächliche Wert V des Zahlungsstromes immer größer oder gleich dem geplanten Wert V* ist, ungeachtet, wie groß und in welche Richtung eine Zinsänderung erfolgt:

$$V^*(D)\leq V(D)$$

Dies kann mit Mitteln der höheren Analysis gezeigt werden.
(Wir haben uns dies anschaulich überlegt.)

Zum Namen „Duration“

Damit kennt man schon zum Zeitpunkt $t = 0$, welchen Wert der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt $t = D$ mindestens haben wird (der Wert ist „immun“ gegen Zinsänderungen).

Es ist so, als ob der Zinssatz zum Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = D$ eingefroren wird (lock in Effekt der Duration).

Dies rechtfertigt den Namen „Duration“: Zeitspanne, bis zu der der Zinssatz eingefroren ist.

Immunisierung in einem Intervall

Verallgemeinerung

In der Regel ist es schwierig, eine Anleihe mit vorgegebener Duration zu finden. Glücklicherweise kann man dies durch **Kombination von Anleihen** (Portefeuillebildung) erreichen.
Es genügen schon zwei Anleihen A_1 mit Duration D_1 und A_2 mit Duration D_2, um jeden Zeitpunkt D^* als Duration zu erhalten!

Sei w der Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_1 investiert wird und 1-w der Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_2 investiert wird.

Dann gilt für die Duration D_{PF} des Portefeuilles aus A_1 und A_2:

$$\mathbf{D_{PF} = w\, D_1 + (1-w)\, D_2}$$

Gewichtung

Will man Immunisierung zum Zeitpunkt $D \in (D_1, D_2)$ erreichen, dann bildet man ein Portefeuille aus A1 und A2 so, dass für dessen Duration D_{PF} die Gleichung $\mathbf{D_{PF} = D}$ gilt.

Aus der Formel für die Duration eines Portefeuilles folgt für die „Gewichtung" w in die Anleihe A1 und damit 1-w in die Anleihe A2:

$D = w\,D1 + (1 - w)\,D2$
$D = w\,D1 + D2 - w\,D2$
$w\,D2 - w\,D1 = D2 - D$
$w\,(D2 - D1) = D2 - D$

Weil D1 ≠ D2 ist, kann man durch D2 - D1≠ 0 dividieren:

$$w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}$$

Immunisierungsstrategie

Damit erhält man folgende **Immunisierungsstrategie** zur Absicherung eines Geldbetrages: V sei der Wert der Verpflichtung in D Jahren und i sei der derzeit gültige Marktzinssatz.

1. Barwertprinzip: Berechne das Investitionsvolumen B als den Barwert der Verpflichtung zum Zinssatz i.
$$B = V\,(1+i)^{-D}$$
2. Suche zwei Anleihen A_1 und A_2 mit den Durationen D_1 und D_2 so, dass
$$D_1 \leq D \leq D_2$$
3. Durationsprinzip: Bilde ein Portefeuille aus A_1 und A_2 so, dass für dessen Duration $D_{PF} = D$ gilt.

Investiere also in A_1 mit w % von B und in A_2 mit (1-w) % von B, wobei

$$w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}.$$

Dann wird zum Zeitpunkt t = D mindestens der Betrag V vorhanden sein!