Mag. Gerhard Hainscho

Bis zur Unendlichkeit, und noch viel weiter …

Georg **Cantor** (1845 - 1918)
Buzz **Lightyear** (Toy Story 1995)

Treffpunkt Mathematik ist eine Initiative der ARGE Mathematik AHS Kärnten in Zusammenarbeit mit dem Landesschulrat für Kärnten, der Pädagogischen Hochschule Kärnten, dem Regionalen Netzwerk Kärnten und IMST.

Klagenfurt, März 2007
Letzte Änderung: Jänner 2010

Inhalt

Ordnen, zählen, vergleichen

Ordnung muss sein!

Aufgabe 1

Welche Zahl ist die größte?

1 2 3

Die Frage in Aufgabe 1 ist nicht *nur* als Scherz gedacht.

- Falls die Frage überhaupt als scherzhaft empfunden wird, dann wahrscheinlich deshalb, weil sie einen Konflikt zwischen der üblichen Antwort und einer unkonventionellen Alternative erzeugt. *Üblicherweise* müsste die Antwort „drei" lauten, weil üblicherweise Zahlen *nicht* nach ihrer Schriftgröße bewertet werden.

  In anderen Situationen ist das weniger selbstverständlich. Welcher Fußballer ist der größte? Hier wird „Größe" vermutlich nach *Leistung* gemessen, vielleicht auch nach *Körpergröße*, aber wohl kaum nach der *Nummer* des Trikots.

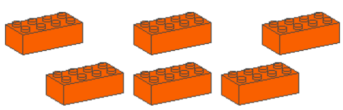
  

  Abb. 1

  Trotzdem spielt *immer* das Zahl-Konzept die entscheidende Rolle bei der Herstellung einer Ordnung: „Leistung" heißt vielleicht die Anzahl der erzielten Tore, vielleicht auch die Höhe des Geldbetrags am Konto; Körpergröße wird ohnehin in Zahlen angegeben.

- Es gibt eine *übliche* Antwort heißt, es gibt eine Konvention, die gelernt wurde. Kleinkinder, die eine solche Konvention noch nicht kennen, antworten z.B. häufig, eine *kürzere* Reihe enthält *weniger* Spielsteine, auch wenn die Anzahl gleich oder sogar größer ist als in der Vergleichsreihe (auch wenn die Reihen vor ihren Augen aufgebaut wurden und sie schon zählen können).

  *Vgl. Jean **Piaget** [1896 - 1980], Alina **Szeminska**: Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart 1965.*

  Unbekannte Konventionen verursachen gelegentlich auch Probleme im Unterricht - Schüler/innen haben zwar diverse Ideen, wissen aber manchmal nicht, welche Antwort von ihnen *erwartet* wird.

[1] Bildquelle: http://fussball.kaywa.ch/files/images/2004/11/mob513_1100022718.jpg (04.03.2007)

- Da man offenbar die Elemente einer Menge nach verschiedenen Kriterien ordnen kann, stellt sich die Frage: Was ist das Gemeinsame *aller* verschiedenen Ordnungen? Was ist *Ordnung?*

  Die Mathematik beschäftigt sich häufig mit solchen Verallgemeinerungen. In diesem Fall findet man eine Antwort in der Algebra, und zwar den Begriff der **Ordnungsrelation**.

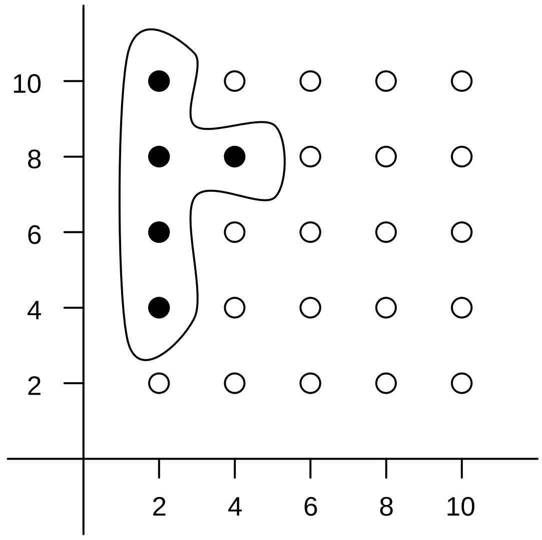
  Eine **Relation** gibt an, welche Elemente zweier Mengen zueinander „in Beziehung“ stehen. Im Unterricht spricht man oft von *Funktionen*; das Konzept der *Relation* ist ganz ähnlich, nur verzichtet man hier auf die Eindeutigkeit der Zuordnung.

Definition: A und B seien Mengen. Unter einer **Relation** $\bigcirc$ zwischen A und B versteht man eine Teilmenge von $A \times B$.

Hinweise:

1. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
2. Stehen a und b in Relation $\bigcirc$ zueinander, schreibt man entweder $(a,b) \in \bigcirc$ oder $a \bigcirc b$.
3. Falls B = A spricht man von einer Relation *auf* A.

Beispiel: Auf der Menge A = {2, 4, 6, 8, 10} ist eine Relation $\bigcirc$ gegeben durch



bzw. $\bigcirc = \{(2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (4,8)\}$

Wie lässt sich $\bigcirc$ mit Worten beschreiben?

[**Lösung:** $a \bigcirc b \Leftrightarrow$ „a ist ein echter Teiler von b“]

Definition: Sei $\preccurlyeq$ eine Relation auf der Menge A. $\preccurlyeq$ heißt **Ordnungsrelation**, wenn gilt:

1. $\preccurlyeq$ ist **reflexiv** : $\forall a \in A: \ a \preccurlyeq a$
2. $\preccurlyeq$ ist **antisymmetrisch** : $\forall a, b \in A: \ a \preccurlyeq b \ \wedge \ b \preccurlyeq a \ \Rightarrow \ a = b$
3. $\preccurlyeq$ ist **transitiv** : $\forall a, b, c \in A: a \preccurlyeq b \ \wedge \ b \preccurlyeq c \ \Rightarrow \ a \preccurlyeq c$

Eine Ordnungsrelation heißt **totale Ordnung** auf der Menge A, wenn gilt:

4. $\preccurlyeq$ ist **konnex** : $\forall a, b \in A: \ a \preccurlyeq b \ \vee \ b \preccurlyeq a$

Eine totale Ordnung heißt **Wohlordnung** auf der Menge A, wenn jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq A$ ein kleinstes Element a_0 besitzt, d.h.:

5. $\forall M \subseteq A \ \exists a_0 \in M \ \forall a \in M: \ a_0 \preccurlyeq a$

Beispiel: Die *natürliche Ordnung* $\leqslant$ ist eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$, aber keine Wohlordnung.
Begründe diese Aussage.

[**Lösung:** Die Eigenschaften (1) bis (4) sind erfüllt, jedoch haben offene Intervalle - z.B.] 0;1 [- kein kleinstes Element, da man den Grenzen *beliebig nahe* kommen kann.]

Beispiel: $0,\overline{9} = 1$
Begründe diese Aussage.

[**Lösung:**

1. Muster-Argument

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} \qquad | \cdot 2 \;|\cdot 3$$

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

$$1 = \frac{3}{3} = 0,\overline{9}$$

2. Stellenwert-Verschiebung

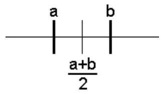
$$\left.\begin{array}{r} x = 0,\overline{9} \qquad | \cdot 10 \;| \cdot (-1) \\ 10x = 9,\overline{9} \end{array}\right]^{+}$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

3. Indirektes Argument

Angenommen, es wäre $0,\overline{9} < 1$, dann müsste es noch eine Zahl dazwischen geben, denn: zwischen je zwei (noch so „eng benachbarten") Zahlen a und b liegt immer noch eine weitere - und damit letztlich unendlich viele.



Es lässt sich aber keine Zahl zwischen $0,\overline{9}$ und 1 angeben.]

Exkurs: Interpretiere die folgende Grafik.

Wow this is a big prime!

Abb. 2

Exkurs: In manchen Situationen spielen Anordnung *und* Schriftgröße vielleicht doch eine Rolle. Zeige in der folgenden Tabelle der Reihe nach auf die Zahlen von 1 bis 40. Wie lange brauchst du?

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">15</td><td colspan="2">13</td><td rowspan="2">26</td><td rowspan="2">34</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2" rowspan="2">23</td><td colspan="2">38</td></tr>
<tr><td colspan="2">28</td><td>16</td><td>9</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td colspan="2" rowspan="2">30</td><td colspan="2" rowspan="2">39</td><td colspan="2">22</td><td colspan="2" rowspan="2">3</td><td colspan="2" rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td colspan="2">17</td><td colspan="2">36</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">32</td><td colspan="2" rowspan="2">24</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">37</td><td>20</td><td>7</td><td rowspan="2">33</td><td rowspan="2">25</td><td colspan="2" rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>29</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">10</td><td colspan="2">19</td><td colspan="2" rowspan="2">35</td><td colspan="2">31</td><td colspan="2" rowspan="2">14</td><td rowspan="2">40</td><td rowspan="2">12</td></tr>
<tr><td colspan="2">21</td><td colspan="2">27</td></tr>
</table>

[2] Bildquelle: http://www.pirabel.de/two.gif (04.03.2007)

Wie weit kannst du zählen?

Aufgabe 2

Welche Zahl ist die größte?

- ❑ eine Billion
- ❑ one billion
- ❑ unendlich

➢ Die Antwort lautet eine Billion, denn:

- das deutsche Wort „Billion“ steht für 10^{12};
- im Englischen gibt es kein Wort für „Milliarde“, auf "one million" folgt "one billion" und steht für 10^{9};
- „unendlich“ ist keine Zahl; *unendlich* bedeutet einfach: mehr, als man zählen kann.

➢ Manche Menschen zählen nur bis 2, genauer: es gibt Sprachen, in denen es nur Wörter für eins und zwei gibt; größere Zahlen müssen durch Addition ausgedrückt werden.

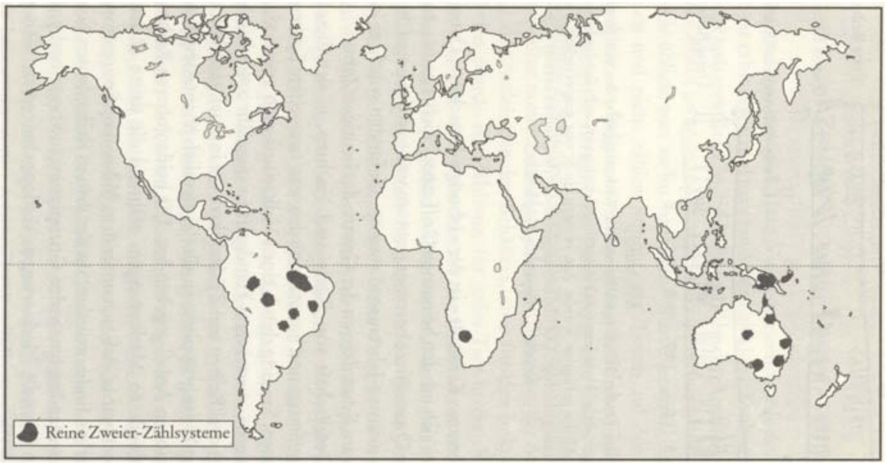


Abb. 3

➢ Andere Menschen erfinden neue Wörter, um besonders große Zahlen benennen zu können, z.B. Edward Kasner [1878 - 1955], der seinen Neffen aufforderte, ein Wort für 10^{100} zu finden und so den Begriff **Googol** prägte. 10^{Googol} nennt er *Googolplex*, $10^{\text{Googolplex}}$ *Googolplexplex* usw. Von Googol wird auch der Name der Internet-Suchmaschine *Google* abgeleitet.

Abb. 4

[3] Bildquelle: John D. **Barrow**: Warum die Welt mathematisch ist. Frankfurt am Main, New York 1993 <Campus>.
[4] Bildquelle: http://www.google.at/images/logo_plain.png (04.03.2007)

- Zählen zu können ist wichtig für mathematisches Denken, aber nicht genug. Menschen, die außer dem Aspekt der *Zählzahl* kein weiteres Konzept von *Zahl* kennen, sind üblicherweise nicht in der Lage, einfachste Rechnungen durchzuführen. Sie sind *ordinal geprägt* und leiden an **Dyskalkulie** (Rechenschwäche).

a b c d e f g h i j

das da ist das h

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

die da ist die 8

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

3 + 4 = ?? 7 = 4 + 3 ??

Mit Hausnummern wird ja auch nicht gerechnet. Man muss sich vom Aspekt der *Zählzahl* lösen und weitere Konzepte entwickeln, insbesondere die Vorstellung von *Anzahl* - jede natürliche Zahl hat (mindestens) diese zwei Aspekte. Georg **Cantor** [1845 - 1918] prägte dafür die Begriffe der *Ordinal*- und *Kardinalzahlen*.

Ordinalzahl 8:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

das 8. Element in der Reihe

Kardinalzahl 8:

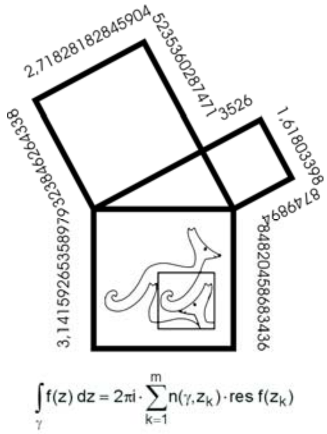
$\boxed{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8}$ 9 10

8 als die Gesamtheit der Elemente

- Auch *unendlich* kann man unter diesen zwei Aspekten betrachten.
  - **Potentielle Unendlichkeit** bedeutet die Möglichkeit, immer weitermachen zu können - z.B. gibt es beliebig große Zahlen, aber keine größte Zahl: man kann immer noch 1 dazuzählen. „Wie weit kannst du zählen?“ „So weit du willst!“ bedeutet *potentiell* unendlich.
  - **Aktuale Unendlichkeit** bedeutet eine Menge mit unendlich vielen Elementen - z.B. $\mathbb{N}$ - in ihrer Gesamtheit.

  Nicht alle Mathematiker/innen akzeptieren die Vorstellung des aktual-Unendlichen. Die Annahme der Existenz aktual-unendlicher Mengen führt unter Umständen zu paradoxen und unerwarteten Konsequenzen.

Exkurs: Wie viel Unendlichkeit steckt im folgenden Logo?



Hinweis: Alle 3 dargestellten Zahlen - π, e und Φ - sind irrational. Der *goldene Schnitt* Φ ist eine *algebraische Zahl* (sie ist Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$), π und e sind *transzendent*, also nicht Lösung einer Gleichung $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_i \in \mathbb{Q}$.

Zusatzfrage: π, e und Φ haben unendlich viele Kommastellen. Was haben sie noch gemeinsam?

Sie sind ein „Eingeständnis unseres Unvermögens", man kann sie nicht *besser* oder *genauer* angeben.

Mathematiker/innen unterscheiden sich von anderen Menschen unter anderem dadurch, dass sie sich darüber auch noch freuen.

Exkurs: Welche Unendlichkeit beschreibt Robert Musil [1880 - 1942] in seinem Roman *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß?*

Von seinen Gedanken beschäftigt, war Törleß allein im Parke spazieren gegangen. Es war um die Mittagszeit, und die Spätherbstsonne legte blasse Erinnerungen über Wiesen und Wege. Da Törleß in seiner Unruhe keine Lust zu weiterem Spaziergange hatte, umschritt er bloß das Gebäude und warf sich am Fuße der fast fensterlosen Seitenmauer in das fahle, raschelnde Gras. Über ihm spannte sich der Himmel, ganz in jenem verblichenen, leidenden Blau, das dem Herbste eigen ist, und kleine, weiße, geballte Wölkchen hasteten darüber hin.

Törleß lag lang ausgestreckt am Rücken und blinzelte unbestimmt träumend zwischen den sich entblätternden Kronen zweier vor ihm stehenden Bäume hindurch.

Er dachte an Beineberg; wie sonderbar doch dieser Mensch war! Seine Worte würden zu einem zerbröckelnden indischen Tempel gehören, in die Gesellschaft unheimlicher Götzenbilder und zauberkundiger Schlangen in tiefen Verstecken; was sollten sie aber am Tage, im Konvikte, im modernen Europa? Und doch schienen diese Worte, nachdem sie sich ewig lange, wie ein Weg ohne Ende und Übersicht in tausend Windungen hingezogen hatten, plötzlich vor einem greifbaren Ziele gestanden zu sein …

Und plötzlich bemerkte er, - und es war ihm, als geschähe dies zum ersten Male, - wie hoch eigentlich der Himmel sei.

Es war wie ein Erschrecken. Gerade über ihm leuchtete ein kleines, blaues, unsagbar tiefes Loch zwischen den Wolken.

Ihm war, als müsste man da mit einer langen, langen Leiter hineinsteigen können. Aber je weiter er hineindrang und sich mit den Augen hob, desto tiefer zog sich der blaue, leuchtende Grund zurück. Und es war doch, als müsste man ihn einmal erreichen und mit den Blicken ihn aufhalten können. Dieser Wunsch wurde quälend heftig.

Es war, als ob die aufs äußerste gespannte Sehkraft Blicke wie Pfeile zwischen die Wolken hineinschleuderte und als ob sie, je weiter sie auch zielte, immer um ein weniges zu kurz träfe.

Darüber dachte nun Törleß nach; er bemühte sich möglichst ruhig und vernünftig zu bleiben. «Freilich gibt es kein Ende», sagte er sich, «es geht immer weiter, fortwährend weiter, ins Unendliche.» Er hielt die Augen auf den Himmel gerichtet und sagte sich dies vor, als gälte es die Kraft einer Beschwörungsformel zu erproben. Aber erfolglos; die Worte sagten nichts, oder vielmehr sie sagten etwas ganz anderes, so als ob sie zwar von dem gleichen Gegenstande, aber von einer anderen, fremden, gleichgültigen Seite desselben redeten.

«Das Unendliche!» Törleß kannte das Wort aus dem Mathematikunterrichte. Er hatte sich nie etwas Besonderes darunter vorgestellt. Es kehrte immer wieder; irgend jemand hatte es einst erfunden, und seither war es möglich, so sicher damit zu rechnen wie nur mit irgend etwas Festem. Es war, was es gerade in der Rechnung galt; darüber hinaus hatte Törleß nie etwas gesucht.

Und nun durchzuckte es ihn wie mit einem Schlage, dass an diesem Worte etwas furchtbar Beunruhigendes hafte. Es kam ihm vor wie ein gezähmter Begriff, mit dem er täglich seine kleinen Kunststückchen gemacht hatte und der nun plötzlich entfesselt worden war. Etwas über den Verstand Gehendes, Wildes, Vernichtendes schien durch die Arbeit irgendwelcher Erfinder hineingeschläfert worden zu sein und war nun plötzlich aufgewacht und wieder furchtbar geworden. Da, in diesem Himmel, stand es nun lebendig über ihm und drohte und höhnte.

Endlich schloss er die Augen, weil ihn dieser Anblick so sehr quälte.

Robert ***Musil****: Die Verwirrungen des Zöglings Törleß. Reinbeck bei Hamburg 1981 (424.-448. Tsd.) <Rowohlt>. S 62 - 63.*

Nur der Vergleich macht sicher …

Aufgabe 3

Welche Zahl ist größer - die der Sessel oder die der Menschen im Bild?

16 | KÄRNTEN

KLEINE ZEITUNG
FREITAG, 2. MÄRZ 2007

Pirker allein im (hohen) Haus

Die Zuhörer waren außerhalb des Bildes.

KLAGENFURT. Klar, Brüssel ist weit weg. Aber vor Fotografen, deren Fotos bis nach Kärnten gelangen, ist keiner sicher. Wie dieses Lichtbild beweist: Hubert Pirker, EU-Abgeordneter in Brüssel, schaffte es damit sogar in das Nachrichtenmagazin „Der Spiegel". Was macht der Abgeordnete aus Kärnten da bloß? Er hält eine Rede, aber wo sind nur seine Zuhörer hin verschwunden? Pirker tapfer: „Die Leute, auf die es mir ankam, die waren anwesend - allerdings rechts und links außerhalb des Bildes." Und so hatte er genug Freiraum über den „Abschlussbericht des so genannten CIA-Untersuchungsausschusses" zu reden. Das Ergebnis des Berichts sei bekannt gewesen, daher sei es normal, dass nur noch Experten zugehört haben: Die ganz links und rechts außen!

Redefreiheit hatte EU-Abgeordneter Hubert Pirker (rechts) im wahrsten Sinne des Wortes, Raumfreiheit sowieso APA/LUTZ

Abb. 5

- Die Frage lässt sich ohne Zählen beantworten, und zwar aus zwei Gründen.

  1. Eine sehr kleine Anzahl von Objekten - in der Regel bis 3 oder 4 - kann von Menschen (und auch von Tieren) unmittelbar wahrgenommen werden, so wie hier die Anzahl der Menschen im Bild. Die alten Griechen betrachteten 1 nicht einmal als Zahl, erst ab 2 beginnt man zu zählen.

  2. „Es gibt mehr Sessel im Bild, weil Sessel frei bleiben." Man kann Mengen durch *Paar-Bildung* vergleichen. Zwei Mengen haben gleich viele Elemente, wenn jedes Element der ersten Menge genau einen Partner in der zweiten Menge hat und umgekehrt.

     Diese Methode funktioniert auch bei Mengen mit unendlich vielen Elementen. Georg Cantor nennt zwei Mengen **gleichmächtig**, wenn eine Paar-Bildung möglich ist, d.h. wenn es eine Zuordnung gibt, die jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zuordnet und umgekehrt. Zwei Mengen haben unterschiedliche Mächtigkeiten, wenn *keine* solche Zuordnung existiert. Die Mächtigkeit einer Menge M bezeichnet man üblicherweise mit $|\, M \,|$.

- Von besonderem Interesse ist der Vergleich einer unendlichen Menge M mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Falls eine Paar-Bildung gelingt, lassen sich die Element von M anordnen und durchnummerieren. Man nennt solche Mengen **abzählbar** unendlich.

---

[5] Bildquelle: Kleine Zeitung, 2. März 2007, S 16.

- Wir betrachten $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und entfernen alle ungeraden Zahlen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
	2		4		6		8		…

Sind es jetzt *weniger* Zahlen als vorher? Nein, durch „Aufrücken" erhält man eine Paar-Bildung, in der niemand ohne Partner bleibt. Insofern gibt es *gleich viele* gerade wie natürliche Zahlen. Anders gesagt: $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen sind *gleichmächtig*.

1	2	3	4	5	…	n	…	m/2	…
2	4	6	8	10	…	2n	…	m	…

Hinweis: *Nur* für unendliche Mengen lassen sich echte Teilmengen finden, die die gleiche Mächtigkeit haben wie die ganze Menge. Seit Richard Dedekind [1831 - 1916] wird diese Eigenschaft oft zur *Definition* unendlicher Mengen verwendet: Eine Menge M heißt unendlich, wenn es eine echte Teilmenge $A \subset M$ gibt, die zu M gleichmächtig ist.

- Wir betrachten $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und fügen 0 hinzu:

	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1	2	3	4	5	6	7	8	…

Sind es jetzt *mehr* Zahlen als vorher? Nein, auch hier erhält man durch Verschiebung um 1 eine Paar-Bildung, in der niemand ohne Partner bleibt.

1	2	3	4	5	…	n	…	m+1	…
0	1	2	3	4	…	n-1	…	m	…

- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}|$, denn:

0	1	2	3	4	5	6	…	n	…
0	-1	1	-2	2	-3	3	…	z	…

Wir sehen:
- $0 \leftrightarrow 0$
- den ungeraden natürlichen Zahlen entsprechen die negativen ganzen Zahlen
- den geraden natürlichen Zahlen entsprechen die positiven ganzen Zahlen

Diese Zuordnung läst sich auch durch Formeln beschreiben, z.B.:

- $z = (-1)^n \cdot (n - n \text{ DIV } 2)$

  wobei DIV die *Integer-Division* bzw. *Division ohne Rest* bezeichnet:
  0 DIV 2 = 0, 1 DIV 2 = 0, 2 DIV 2 = 1, 3 DIV 2 = 1, 4 DIV 2 = 0, …

bzw. umgekehrt z.B.:

- $n = \left| 2z \right| - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn}(z + 1 - \left| \operatorname{sgn}(z) \right|)$

  wobei die *Signumfunktion* sgn jeder Zahl z ihr Vorzeichen zuordnet, also:

$$\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1 & \text{für } z < 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \\ 1 & \text{für } z > 0 \end{cases}$$

- $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Q}|$, denn:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\[2em]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\[2em]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\[2em]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\[2em]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Alle positiven Brüche lassen sich gemäß obiger Tabelle anordnen - wobei viele Zahlen mehrfach vorkommen, aber keine ausgelassen wird - und mit einem **Cantorschen Diagonalverfahren** nummerieren. Dasselbe Verfahren kann man auf die negativen Brüche anwenden und anschließend - wie vorhin - die Zahl 0 der Zahl 0 und die positiven bzw. negativen Brüche den geraden bzw. ungeraden natürlichen Zahlen zuordnen. Insgesamt sind damit auch alle rationalen Zahlen abzählbar, d.h. die Mengen $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig.

Georg Cantor [1845 - 1918] war Professor an der Universität in Halle an der Saale. Die Stadt errichte ihm und drei anderen Wissenschaftlern

- Georg Ernst Stahl [1660 - 1734]: Chemiker, Physiker und Mediziner
- Friedrich August Wolf [1759 - 1824]: Altertumswissenschaftler
- Viktor Klemperer [1881 - 1960]: Romanist

ein gemeinsames würfelförmiges Denkmal, auf dem unter anderem dieses Diagonalverfahren dargestellt ist.

Abb. 6

[6] Bildquelle: http://www.w-volk.de/museum/cantor02.jpg (04.03.2007)

- Die bisher beschriebenen Methoden des Umsortierens und Nummerierens werden in der Literatur oft anhand des *Hilbertschen Hotels* erläutert, eines Hotels mit abzählbar unendlich vielen Zimmern …

Das ungewöhnliche Hotel
oder die eintausendunderste Reise des John Tichy

Ich war ziemlich spät nach Hause gekommen, denn der Abend im Klub ANDROMEDANEBEL hatte sich bis weit nach Mitternacht hingezogen. Während der ganzen Nacht quälten mich Alpträume. Bald glaubte ich mich von einem gewaltigen Drachen verschlungen; bald schien es mir, als würde ich wieder auf dem Planeten Durtiotow landen und wüsste nicht, wie ich den dortigen grausigen Maschinen entgehen sollte, die Menschen in Sechsecke verwandeln; dann wiederum träumte mir ... Mit seinem schrillen Ton rief mich das Telefon in die Wirklichkeit zurück. Am Apparat war mein guter alter Freund, mein Weggenosse vieler Fahrten im interstellaren Raum, Professor Tarantoga. „Eine wichtige Aufgabe, lieber John“, so hörte ich seine Stimme, „die Astronomen haben im Kosmos ein geheimnisvolles Objekt entdeckt. Von einer Galaxis zur anderen erstreckt sich eine unbekannte dunkle Linie. Die besten Fernrohre, Radioteleskope, Neutrinoskope und Gravitoskope können nicht helfen. Du bist unsere letzte Hoffnung. Starte unverzüglich in Richtung des Nebels AZD - 1587!“

Am nächsten Morgen holte ich meine gute alte Photonenrakete aus der Reparatur, montierte noch den Zeitbeschleuniger und den Elektronenroboter, der alle kosmischen Sprachen beherrscht und zur Vertreibung der Langeweile alle Erzählungen über die Welt der Sterne kennt, und begab mich auf die Reise.

Als der Roboter das Repertoir seiner Unterhaltung erschöpft hatte und gerade von vorn beginnen wollte (und ich kann Euch sagen, dass es nichts fürchterlicheres gibt, als einen Roboter, der eine dieser abgewetzten Geschichten zehnmal erzählt), näherte ich mich meinem Ziel. Ich ließ die letzten Nebel, die die dunkle Linie verhüllt hatten, hinter mir und sah vor mir das Hotel KOSMOS.

Um all den vielen Weltenwanderern endlich eine Heimat zu geben, wenn sie von Planet zu Planet fahren und nirgends eine Bleibe vorfinden, hatte das Volk der Wygont beschlossen, ein Hotel für alle Sternenreisenden zu bauen. Dasselbe erstreckte sich fast durch alle Milchstraßen und wies so vieles Wunderbare auf, dass ich fürchte, ein Lügner zu heißen, wenn ich es alles berichten würde. Das Wesentliche muss ich aber doch noch sagen: das Hotel hatte unendlich viele Zimmer. So hofften die Erbauer, unbedingt zu erreichen, dass keiner je verärgert wieder aus dem Tor gehen müsste, nachdem ihm der Portier gesagt hatte: „Es ist nichts mehr frei.“

Und doch hatte ich kein Glück. Kaum hatte ich das Foyer betreten, als mir auch schon ein Plakat in die Augen stach: „Tagungsbüro der Kosmoszoologentagung in der 127. Etage“. Weil von allen Galaxien die Kosmoszoologen herbeigekommen waren, die Menge aller Milchstraßensysteme aber unendlich ist, mussten alle Zimmer belegt sein und für mich war doch kein Platz mehr zu finden. Und tatsächlich schlug mir der Portier zunächst auch vor, mit irgendeinem Kosmoszoologen zusammen zu übernachten. Als ich ihm jedoch klarmachte, dass der eine mir vorgeschlagene Nachbar -271°C und der andere +587°C als angenehme Zimmertemperatur empfinden würde, war er mit seinem Latein am Ende. Zum Glück war der Direktor des Hotels ein Wygont und erinnerte sich recht gut an die Dienste, welche ich seinem Stamm einst erwiesen hatte. Er versprach, mich unbedingt im Hotel unterzubringen, konnte man sich doch beim Übernachten im interstellaren Raum eine ziemliche Erkältung zuziehen. Nach kurzem Besinnen wandte er sich an den Portier und sagte: „Gib ihm Nr. 1.“

„Wohin soll ich aber dann den Gast aus Nr. 1 legen?“ fragte ziemlich erstaunt der Portier. „Nun, dem weisen wir Nr. 2 zu, der Herr aus Nr. 2 zieht nach Nr. 3 und so weiter!“ So lernte ich die ungewöhnlichen Eigenschaften des Hotels zum ersten Male kennen. Hätte es nur endlich viele Zimmer gehabt, dann hätte der Direktor diese „Lösung“ nicht vorschlagen können, dann hätte ein Gast - vielleicht wäre nicht ich der Unglückliche gewesen - im Kosmos übernachten müssen. Da das Hotel jedoch unendlich viele Zimmer hatte, bekam ich mein Zimmer allein und hatte dennoch ein ruhiges Gewissen, denn alle anderen Gäste wohnten noch immer im Hotel.

Nun staunte ich auch nicht, als man mich am nächsten Morgen ersuchte, in Nr. 1 000 000 überzusiedeln. In der Nacht waren nämlich die Zoologen von der Galaxis WSK - 3472 eingetroffen, so dass nochmals 999 999 Gäste untergebracht werden mussten. Als ich aber am dritten Tag in die Halle kam, gingen mir fast die Augen über. An der Rezeption stand eine Schlange neuer Gäste, deren Ende sich irgendwo in der Nähe der Magellan-Wolke zu befinden schien.

Auf meine erstaunte Frage hin ergab sich folgendes Gespräch mit dem Portier:

- „Das ist die intergalaktische Philatelistenvereinigung.“
- „Sind es viele?“
- „Eine unendliche Menge - mindestens ein Mitglied aus jedem Milchstraßensystem.“
- „Wo sollen sie denn aber alle untergebracht werden? Der Zoologenkongress endet doch erst morgen!“
- „Ich weiß nicht. In etwa fünf Minuten wird es der Direktor anordnen.“

Nun - die Frage war offenbar doch komplizierter, als man angenommen hatte, und es ging allen Wartenden genauso wie auf der Erde. Aus fünf Minuten war eine Stunde geworden, als der Portier endlich vom Direktor kam und verkündete, dass der Gast aus Nr. 1 bitte nach Nr. 2 umziehen möchte. Mir erschien das recht sinnlos, denn ich wusste ja aus eigener Erfahrung, dass man auf diese Weise nur einen neuen Gast unterbringen konnte. Es sollten aber nicht mehr und nicht weniger als unendlich viele Philatelisten untergebracht werden! Aber der Portier gab bereits seine nächsten Anweisungen: „Der Gast von Nr. 2 möge nach 4, dieser nach 8, der Gast von 3 nach 6 und so weiter übersiedeln.“

Jeder Gast, der im Zimmer Nr. n wohnte, sollte nach Nr. $2n$ umziehen! Jetzt wurde mir sein Plan klar. Auf diese Weise bekam er die unendliche Menge der Zimmer mit ungerader Nummer frei und konnte sie mit den Philatelisten belegen. So wohnten denn schließlich in den Zimmern mit ungerader Nummer die Briefmarkenfreunde und die Zoologen in denen mit gerader Nummer.

Am anderen Tag wurde die Hälfte der Zimmer frei, denn der Zoologenkongress war zu Ende gegangen und alle Kosmoszoologen waren wieder abgereist. Ich selbst zog in ein leerstehendes Zimmer der Wohnung des Hoteldirektors. Während neu ankommende Gäste sich gefreut hätten, so viele leere Zimmer vorzufinden, bereitete die Lage meinem Direktor Sorgen und nach einigen Tagen wurde mein freundlicher Gastgeber ganz niedergeschlagen. „Worüber denkst Du nach?“ fragte ich ihn.

- „Die Hälfte meiner Zimmer steht leer. Ich kann meinen Finanzplan nicht erfüllen“, antwortete er.

Ich verstand zwar wirklich nicht, wieso hier ein Finanzplan gefährdet sein sollte, wo doch nach wie vor unendlich viele Gäste pünktlich zahlten, gab aber dennoch den Rat, die verbliebenen Gäste wieder so „umzuordnen“, dass alle Zimmer belegt werden. Das war doch ganz einfach zu machen. Zur Zeit bewohnten die Philatelisten nur die ungeraden Nummern 1, 3, 5, 7, 9 usw. Der Gast aus Nr. 1 kann dort bleiben, der Herr von Nr. 3 muss aber nach 2 ziehen usw. Schließlich sind alle Nummern wieder besetzt, obwohl kein einziger neuer Gast eingetroffen ist!

Die Unannehmlichkeiten des Direktors waren damit aber noch nicht zu Ende. Es stellte sich nämlich heraus, dass die Wygont die Errichtung des Hotels KOSMOS nicht als Ende ihrer Tätigkeit ansahen. Die rastlosen Bauleute errichteten noch eine unendliche Menge von Hotels, von denen ein jedes unendlich viele Zimmer hatte. Zur Beschaffung des Baumaterials demontierten sie so viele Sternensysteme, dass das kosmische Gleichgewicht gestört wurde, was wiederum die schlimmsten Folgen nach sich ziehen konnte. Deshalb bekamen sie den Auftrag, alle Hotels außer unserem wieder zu schließen und das verwendete Material zurückzubringen. Die Ausführung dieses Befehls war allerdings nicht so einfach, denn alle Hotels (darunter auch unseres) waren inzwischen besetzt. Es hieß also, die Gäste aus unendlich vielen Hotels mit jeweils unendlich vielen Zimmern in ein einziges Hotel mit unendlich vielen Zimmern unterzubringen, das zu allem Überfluss auch noch besetzt war!

„Mich trifft der Schlag!“ rief der Direktor aus. Am Anfang habe ich einen neuen Gast in ein ausverkauftes Hotel aufgenommen, dann 999 999 und schließlich sogar unendlich viele! Jetzt fordert man von mir, dass ich in diesem ausverkauften Hotel noch eine unendliche Menge von unendlichen Mengen von Gästen anderer Hotels unterbringen soll. Nein, mein Hotel ist schließlich nicht aus Gummi. Sollen sie nur bleiben, wo der Pfeffer wächst!“

Aber Anordnung ist Anordnung, und in fünf Tagen sollte alles für den Empfang der neuen Gäste gerüstet sein. In diesen Tagen arbeitete niemand im Hotel, alle dachten darüber nach, wie das Problem zu lösen sei. Auch ein öffentliches, kosmosweites Preisausschreiben war ausgeschrieben worden.

Alle zunächst vorgelegten Lösungsvorschläge erwiesen sich als falsch. So hatte z.B. der jüngste Koch den Vorschlag gemacht, die Gäste unseres Hotels zunächst aus der jeweiligen Nummer n in die Nr. $1000\cdot(n-1)+1$, d.h. $1 \to 1$, $2 \to 1001$, $3 \to 2001$, ziehen zu lassen. Dann würden die Gäste des zweiten Hotels in die Nummern 2, 1002, 2002 usw., die des dritten nach 3, 1003, 2003, ... ziehen und so weiter. Das Projekt war aber unzureichend, weil schon die Gäste aus 1000 Hotels sämtliche Nummern des Hotels „Kosmos“ aufbrauchen würden.

Ich erinnerte mich in diesem Zusammenhang daran, dass der römische Kaiser TIBERIUS einst auf den Vorschlag seiner schmeichlerischen Senatoren, seinen Geburtsmonat September in „Tiberius“ umzubenennen (die Vormonate trugen bereits die Namen römischer Herrscher: Julius und Augustus), antwortete: „Was aber werdet ihr dem dreizehnten Cäsar vorschlagen?“

Die vom Buchhalter des Hotels vorgeschlagene Variante schien zunächst ganz gut zu sein. Er wollte eine Verteilung nach geometrischen Folgen durchführen. Die Gäste des ersten Hotels sollten in die Zimmer mit den Nummern 2, 4, 8, 16, 32, ... ziehen (die Zahlen bilden eine geometrische Folge mit dem Quotienten 2). Die Bewohner des zweiten Hotels sollten in die Zimmer Nr. 3, 9, 27, 81 usw. kommen (geometrische Folge mit dem Quotienten 3). Genauso wollte er alle anderen Fälle behandeln. Der Direktor aber fragte ihn: „Für das dritte Hotel nehmen wir also die geometrische Folge mit dem Quotienten 4?“

„Natürlich“, antwortet der Buchhalter.

„Dann nützt uns die Sache nichts, denn in der Nr. 4 wohnt bereits ein Gast aus dem ersten Hotel!“

Nun war es aber an mir zu beweisen, dass ich nicht umsonst an der Sternenakademie fünf Jahre Mathematik studiert hatte.

„Nehmen Sie als Quotienten immer nur die Primzahlen! Das erste Hotel bekommt die Nummern 2, 4, 8, 16 ..., das zweite erhält 3, 9, 27 ..., das dritte 5, 25, 125 ..., das vierte 7, 49, 343 ... zugewiesen und so weiter.“

„Und es kann dann tatsächlich nicht vorkommen, dass zwei Gäste das gleiche Zimmer zugewiesen bekommen?“ fragte der Direktor.

„Nein“, antwortete ich, „denn nehmen Sie doch zwei verschiedene Primzahlen, dann kann keine Potenz mit natürlichem Exponenten der einen Zahl jemals einer Potenz der anderen gleich sein. Wenn p, q Primzahlen sind, dann folgt aus $p \neq q$ auch $p^m \neq q^n$ für alle natürlichen Exponenten m und n.“

Der Direktor schaute mich eine Weile an und machte dann einen neuen Vorschlag, bei dem man nur zwei Primzahlen benötigte. Er schlug nämlich vor, den Gast aus dem Hotel Nr. n mit der Zimmernummer m in die Nr. $2^n\cdot 3^m$ unseres Hotels ziehen zu lassen. Es ist doch so, dass $2^n 3^m \neq 2^p 3^q$ sicher gilt, wenn $n \neq p$ oder $m \neq q$ ist. Wir würden demnach auch hierbei keine Doppelbelegung haben.

Diese Lösung versetzte uns alle in Begeisterung, und die Aufgabe schien vollkommen gelöst zu sein. Aber die Prämie bekam ich doch nicht und auch nicht der Direktor, denn man rechnete uns vor, dass bei unserer Lösung viele Zimmer nicht besetzt würden, was ökonomisch nicht vertretbar wäre. (Welche Nummern beträfe das?)

Die beste Lösung legte schließlich einer der Briefmarkensammler vor - er war Präsident der Galaktischen Akademie der Wissenschaften. Er empfahl zunächst die Aufstellung einer Tabelle aller Hotelgäste. In einer Zeile sollten jeweils die Gäste ein und desselben Hotels stehen, während die Spalten den Zimmernummern entsprechen sollten. So wurde also der Gast aus dem 6. Hotel, Zimmer 11 an der Kreuzungsstelle der 6. Zeile mit der 11. Spalte eingetragen.

Der Anfang dieser Tabelle sah so aus:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...	(1,n)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...	(2,n)	...
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...	(3,n)	...
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...	(4,n)	...
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	...	(5,n)	...
...	...	...	...	...	...	...	...
(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	...	(m,n)	...
...	...	...	...	...	...	...	...

- „Und nun ordnen wir sie alle nach Quadratseiten“, sagte der Philatelist.

- „Wie?“, der Direktor verstand nicht.

- „Nach Quadratseiten! (1,1) kommt nach Nr. 1, (1,2) zieht in Nr. 2, (2,2) in Nr. 3, (2,1) in Nr. 4. Dann geht es weiter längs der Seiten des nächst größeren Quadrates: (1,3) nach Nr. 5, (2,3) nach 6, (3,3) nach 7 usw. Verstehen Sie nun, dass wir immer längs der beiden Seiten eines Quadrates abzählen?“ Und er nahm einen Bleistift zur Hand und ergänzte die Tabelle durch Pfeile:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & & \dots & & (1,n) & & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(2,1) & \leftarrow & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & & \dots & & (2,n) & & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & \leftarrow & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & & \dots & & (3,n) & & \dots \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(4,1) & \leftarrow & (4,2) & \leftarrow & (4,3) & \leftarrow & (4,4) & & (4,5) & & \dots & & (4,n) & & \dots \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
(5,1) & \leftarrow & (5,2) & \leftarrow & (5,3) & \leftarrow & (5,4) & \leftarrow & (5,5) & & \dots & & (5,n) & & \dots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
(m,1) & \leftarrow & (m,2) & \leftarrow & (m,3) & \leftarrow & (m,4) & \leftarrow & (m,5) & \leftarrow & \dots & & (m,n) & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

- „Wird der Platz in meinem Hotel aber auch für alle reichen?“ zweifelte der Direktor noch immer.

- „Natürlich! Die ersten n^2 Zimmer vergeben wir dabei an die Bewohner der ersten n Zimmer der ersten n Hotels. So bekommt früher oder später jeder Bewohner der Hotels seinen Platz in unserem Hotel. Wenn der Gast zum Beispiel im Zimmer 217 des 136. Hotels wohnt, dann kommt er im 217. Schritt sicher an die Reihe und erhält - das können Sie sich selbst leicht überlegen in unserem Hotel die Zimmernummer $N = 217^2 - 136 + 1$. Ganz allgemein erhält ein Bewohner des n-ten Zimmers im m-ten Hotel bei uns das Zimmer mit der Nummer

$$
N = \begin{cases} (n-1)^2 + m, & \text{falls } n \geq m \\ m^2 - n + 1, & \text{falls } n < m \end{cases}
$$

Dieser Vorschlag wurde schließlich angenommen, denn er sicherte gleichzeitig die volle Belegung unseres Hotels. Der Mathematiker und Briefmarkenfreund erhielt als Preis - eine Touristenreise zum Sternensystem LZR - 287.

Nach der erfolgreichen Beendigung des Umzugunternehmens gab der Direktor des Hotels einen Empfang, zu dem alle seine Gäste geladen waren. Auch dieser Empfang verlief nicht ohne Komplikationen. Die Bewohner der Zimmer mit geraden Nummern verspäteten sich um eine halbe Stunde, und als sie schließlich erschienen, mussten sie feststellen, dass alle Stühle besetzt waren, obwohl der Gastgeber für jeden seiner unendlich vielen Gäste einen Stuhl bereitgestellt hatte. Der Gastgeber löste aber auch dieses Problem. Er bat lediglich darum, dass alle bereits sitzenden Gäste sich noch einmal von ihren Plätzen erheben möchten und forderte dann alle Anwesenden wieder zum Platznehmen auf. Und siehe da, alle fanden jetzt einen Stuhl (ohne dass auch nur ein neuer Stuhl herbeigebracht worden wäre)!

Als dann später das Eis gereicht wurde, erhielt jeder Gast zwei Portionen, obwohl der Konditor ganz sicher nur eine Portion für jeden Gast bereitet hatte. Ich hoffe, dass der Leser jetzt selbst herausbekommt, wie das alles möglich war.

Als der Empfang vorüber war, stieg ich in meine Photonenrakete und flog zurück zur Erde, um zunächst allen meinen Kosmonautenkollegen von der neuen Übernachtungsmöglichkeit im Weltraum zu berichten. Dann wollte ich mich aber vor allem auch mit den berühmtesten Mathematikern der Erde und insbesondere mit meinem Freund Tarantoga über die Eigenschaften der unendlichen Mengen unterhalten.

*N. J. **Wilenkin**: Unterhaltsame Mengenlehre. Leipzig 1973 <BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft>. S 65 - 73.*

An anderer Stelle (S 54) schreibt der Autor: Die Reisen John Tichys sind von dem bekannten polnischen Schriftsteller STANISLAW LEM in seinem Buch „Die Stern-Tagebücher des John Tichy“ beschrieben worden. Der Autor ... hofft, dass S. Lem ihm seine ungeschickte Imitation verzeiht und dass die Leser dieses Buches seine literarischen Mängel nicht S. Lem zur Last legen werden.

- Fassen wir zusammen: $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

  Sind also *alle* unendlichen Mengen gleichmächtig? Nein, $|\mathbb{N}_0| < |\mathbb{R}|$, denn:

  Angenommen, die reellen Zahlen wären abzählbar, dann gäbe es insbesondere eine Liste *aller* reellen Zahlen im Intervall [0;1] - sie könnte z.B. so beginnen:

  $0,\ \underline{0}\ 0\ 0\ 0\ \ldots$

  $0,\ 0\ \underline{1}\ 3\ 7\ \ldots$

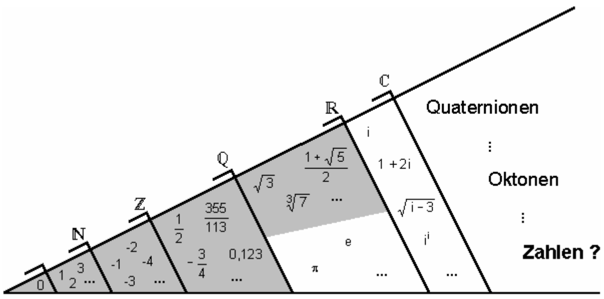
  $0,\ 1\ 8\ \underline{2}\ 4\ \ldots$

  $0,\ 3\ 3\ 3\ \underline{0}\ \ldots$

  $\vdots$

  Wir können aber trotzdem eine weitere Zahl konstruieren, die nicht in obiger Liste enthalten ist, z.B. 0,1001…: ihre erste Kommastelle unterscheidet sich von der der ersten Zahl in der Liste, ihre zweite Kommastelle unterscheidet sich von der der zweiten Zahl usw. Es kann also keine Liste aller Zahlen in [0;1] geben, somit gibt es *mehr* reelle als natürliche Zahlen. Man sagt: die Menge $\mathbb{R}$ ist **überabzählbar**.

- Ist $\mathbb{Q}$ die Grenze zwischen abzählbaren und überabzählbaren Mengen? Nein, denn: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.



Als „algebraische Zahlen“ bezeichnet man die (höchstens n) reellen Lösungen von Gleichungen der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_i, auch wenn sie nicht als *Radikale* darstellbar sind.

Wir wissen: $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}|$, man kann also die ganzen Zahlen nummerieren. Bezeichnen wir mit <z> die Nummer einer ganzen Zahl z. Durch die Zuordnung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \leftrightarrow 2^{<a_0>} \cdot 3^{<a_1>} \cdot 5^{<a_2>} \cdot \ldots \cdot p_{n+1}^{<a_n>}$$

wird jeder algebraischen Gleichung eindeutig eine natürliche Zahl zugeordnet und umgekehrt, somit lassen sich alle algebraischen Gleichungen nummerieren. Denkt man sich alle Lösungen algebraischer Gleichungen in Zeilen geschrieben, wobei in der i-ten Zeile gerade die Lösungen der Gleichung mit der Nummer i stehen, so kann man z.B. mit einem Cantorschen Diagonalverfahren alle algebraischen Zahlen nummerieren und damit die Menge aller algebraischen Zahlen abzählen.

Hinweis: Die meisten reellen Zahlen sind daher *nicht* algebraisch sondern *transzendent*. Die bekannteste transzendente Zahl ist die „Kreiszahl“ π. Bisher konnten keinerlei Muster oder Regelmäßigkeiten in den Nachkommastellen von π gefunden werden. Sollte es tatsächlich keine geben, würde das z.B. bedeuten: Jede beliebige Ziffernfolge ist in π enthalten - nicht nur jede Telefonnummer und jedes Geburtsdatum, sondern auch eine codierte Version jeder schriftlichen Arbeit incl. dieses Skriptums, jedes Buches, das je geschrieben wurde oder noch geschrieben wird und incl. einer genauen Charakteristik der Zahl π selbst - leider auch incl. jeder fehlerhaften, sinnlosen und verfälschten Version dieser Werke, was eine Auffindung der „Originale“ praktisch unmöglich macht.

- Die Potenzmenge P(M) einer beliebigen Menge M ist von höherer Mächtigkeit als M selbst.

  Als *Potenzmenge* P(M) bezeichnet man die Menge aller Teilmengen von M. Der Name erinnert daran, dass bei endlichen Mengen die Anzahl ihrer Elemente stets $2^{|M|}$ ist, z.B.:

  $M = \{a, b, c\} \Rightarrow |M| = 3$; $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\} \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \Rightarrow |P(M)| = 8 = 2^3$

  Angenommen, die Mengen A = {a, b, c, …} und P(A) wären gleichmächtig, dann müsste es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von A und jenen von P(A) geben, z.B.:

  A P(A)

  a $\leftrightarrow$ {a, b, c} = M(a) ... wir bemerken: $a \in M(a)$

  b $\leftrightarrow$ {x, y, z} = M(b) ... wir bemerken: $b \notin M(b)$

  $\vdots$ $\vdots$

  Betrachten wir die Menge aller Elemente x aus A, die *nicht* in der ihnen zugeordneten Menge M(x) enthalten sind: $U := \{x \in A \mid x \notin M(x)\}$.

  U ist Teilmenge von A und daher Element vom P(A), somit muss U einem Element w aus A zugeordnet sein: $w \leftrightarrow U = M(w)$.

  Die Frage, ob nun w in M(w) enthalten ist, führt zu einem Widerspruch:

  - angenommen, $w \in M(w)$

    $w \in M(w) = U \Rightarrow w \notin M(w)$, denn U ist ja gerade die Menge aller Elemente x, die nicht in M(x) enthalten sind … Widerspruch!

  - angenommen, $w \notin M(w)$

    $w \notin M(w) \Rightarrow w \in U = M(w)$ … Widerspruch!

  | P(A) | kann also nicht gleich | A | sein, klarerweise auch nicht kleiner, daher gilt: $|P(A)| > |A|$.

  Diese Aussage eröffnet eine ganze Hierarchie unendlicher Kardinalzahlen. Insbesondere ist $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \dots$

  Georg Cantor bezeichnet die Mächtigkeit der Menge $\mathbb{N}$ mit *Aleph* (Index 0), dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets und kabbalistischen Symbol für unendlich: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Für die Mächtigkeit der Potenzmenge von $\mathbb{N}$ schreibt er: $|P(\mathbb{N})| = \aleph_1$.

  Mit diesen Symbolen geschrieben erscheint

  $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| < |P(P(\mathbb{N}))| < \dots$ als $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$

  Hinweis: Es gibt keine *Menge aller Mengen*. Einerseits müsste sie als Menge *aller* Mengen auch ihre Potenzmenge beinhalten, andererseits hätte diese Potenzmenge eine höhere Mächtigkeit als die Menge selbst - was aber nicht sein kann, auch nicht für Teilmengen unendlicher Mengen.

- Die Mächtigkeit des *Kontinuums* (der Menge $\mathbb{R}$) wird üblicherweise mit c bezeichnet: $|\mathbb{R}| = c$. Georg Cantor fand die Beziehung $c = 2^{\aleph_0}$. Es gilt: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ und $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$, in anderer Schreibweise: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ und $\aleph_0 < \aleph_1$.

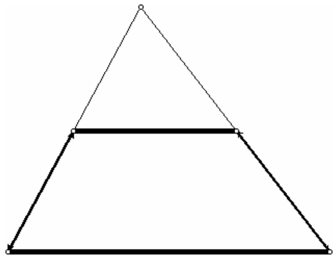
  Ist vielleicht $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Sind also die Mengen $\mathbb{R}$ und $P(\mathbb{N})$ gleichmächtig?

  Diese aufgrund der formalen Analogie zur Eigenschaft endlicher Mengen vielleicht nahe liegende Vermutung Cantors ist als **Kontinuumshypothese** bekannt, konnte von ihm aber weder bewiesen noch widerlegt werden. Das Problem wurde erst 1963 von Paul COHEN gelöst. Er konnte zeigen, dass die Kontinuumshypothese nicht aus dem Zermelo-Fraenkelschen Axiomensystem ableitbar ist, sie ist im Rahmen des Axiomensystems *unentscheidbar*. Man kann also Mengenlehren mit und ohne Kontinuumshypothese betreiben (wie man z.B. auch euklidische und nichteuklidische Geometrien betreiben kann).

Wir wissen: $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$. Gibt es auch interessante gleichmächtige (Teil)Mengen zu $\mathbb{R}$? Stellt man reelle Zahlen als Punkte einer Zahlengerade dar, erhält man z.B. folgende Ergebnisse:

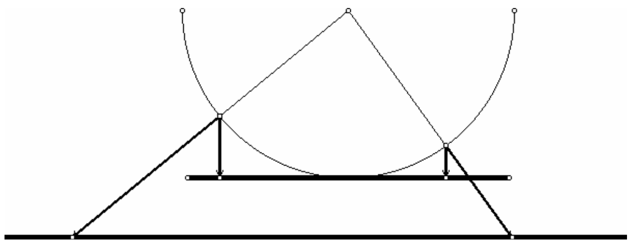
- Alle Strecken enthalten gleich viele Punkte.

  Beweis durch Paar-Bildung:



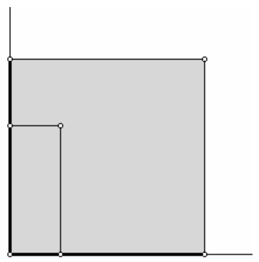
- Eine Strecke (offenes Intervall) enthält gleich viele Punkte wie eine Gerade.

  Beweis durch Paar-Bildung:



- Eine Strecke enthält gleich viele Punkte wie ein Quadrat.

  Beweis durch Koordinatenmischung:
  Betrachten wir z.B. die Strecke s $[\, 0 \leq x < 1 \,]$ und das Quadrat Q $[\, 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1 \,]$



Sei z.B. x = 0,3994599967..., y = 0,959978090...
Schreibt man die Koordinaten mit einem Strich hinter jeder Ziffer $\neq 9$

$x = 0{,}3 \,|\, 994 \,|\, 5 \,|\, 9996 \,|\, 7 \,|\, \ldots$
$y = 0{,}95 \,|\, 997 \,|\, 8 \,|\, 0 \,|\, 90 \,|\, \ldots$

und mischt die so erhaltenen Zifferngruppen,

$z = 0{,}3\ 95\ 994\ 997\ 5\ 8\ 9996\ 0\ 7\ 90\ \ldots$

so erhält man einen Punkt aus s, der umkehrbar eindeutig einem Punkt aus Q zugeordnet ist.

So lässt sich auch zeigen, dass eine Gerade gleich viele Punkte enthält wie die Ebene, damit enthält aber auch jede Strecke gleich viele Punkte wie die gesamte Ebene und sogar wie der gesamte (n-dimensionale) Raum.

Eine kurze Geschichte von *unendlich*

Die Pythagoreer

Abb. 7[7]

Abb. 8[8]

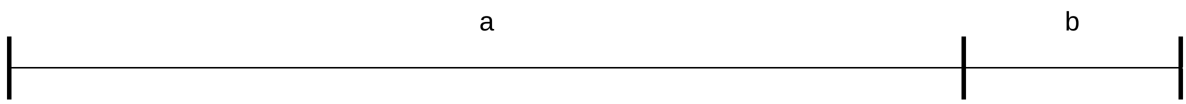
Die fünf Diagonalen eines regulären Fünfecks bilden eine Figur, die unter verschiedenen Namen bekannt ist: **Pentagramm**, Pentakel, Pentalpha, Sternfünfeck, Drudenfuß und andere. Man kann ein Pentagramm als reguläres Fünfeck betrachten, dabei verzichtet man allerdings auf Konvexität und nimmt in Kauf, dass sich die Seiten nicht nur in den Eckpunkten schneiden. Pentagramme lassen sich in einem Zug zeichnen.

Schon die *Pythagoreer* (5. Jh. v. Chr.) schrieben dem Pentagramm magische Kräfte zu und betrachteten es als Symbol für Gesundheit. Sie verwendeten es als Zeichen der Mitgliedschaft in ihrem Bund - obwohl es gerade das Pentagramm war, das ihr Weltbild veränderte: An dieser Figur erkannten sie, dass das Verhältnis der Diagonale d zur Fünfecksseite a nicht als Bruch dargestellt werden kann, was zur Entdeckung der *irrationalen Zahlen* führte. Es ist

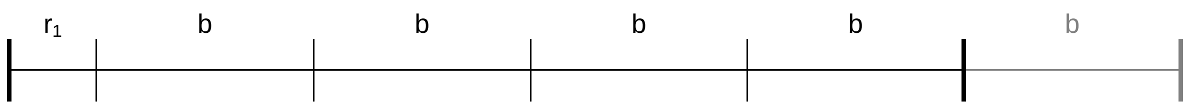
$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\,4989484820\ldots$$

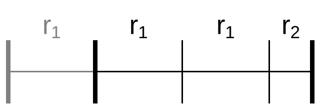
Diese Zahl heißt *goldener Schnitt* und wird meist mit Φ bezeichnet - zu Ehren des Bildhauers *Phidias* (griechisch: $\Phi\iota\delta\iota\alpha\sigma$), der unter anderem die Zeus-Statue in Olympia schuf, eines der sieben Weltwunder der Antike. Doch nicht nur Phidias, auch viele andere Künstler sahen - bewusst oder unbewusst - den goldenen Schnitt als mathematischen Aspekt von Schönheit.

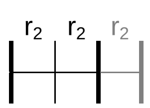
Die Pythagoreer interpretierten *rationale Zahlen* als *Verhältnisse* von Strecken. Die Ermittlung eines solchen Verhältnisses kann durch **Wechselwegnahme** erfolgen.



$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \text{ a und b haben ein } \textit{gemeinsames Maß}$$







$$a - 4b = r_1 \qquad a = 4b + r_1 = 20r_2 + 2r_2 = 22r_2$$

$$b - 2r_1 = r_2 \qquad b = 2r_1 + r_2 = 5r_2$$

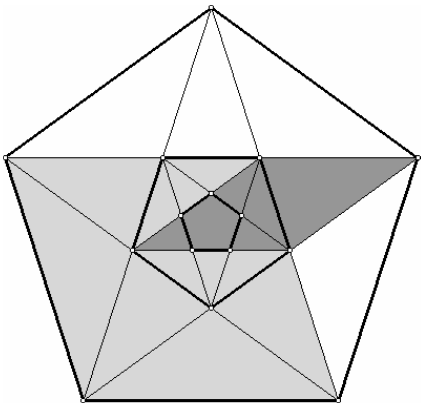
$$r_1 - 2r_2 = 0 \qquad r_1 = 2r_2$$

$\Rightarrow$ r_2 ist gemeinsames Maß für a und b:

$$a = 22r_2\,,\ b = 5r_2\,,\ \frac{a}{b} = \frac{22}{5}$$

[7] Bildquelle: http://members.xtel.at/amba/penta8.gif (01.08.2006)
[8] Bildquelle: http://www.piercethings.de/shop/images/(K)Drudenfuss.jpg (01.08.2006)

- Diese Methode funktioniert beim Pentagramm im Pentagramm im Pentagramm … *nicht*, genauer: man kommt zu keinem Ende. Bezeichnet man mit d_i bzw. a_i die Länge der Diagonale bzw. Seite des i-ten Fünfecks, so erkennt man:

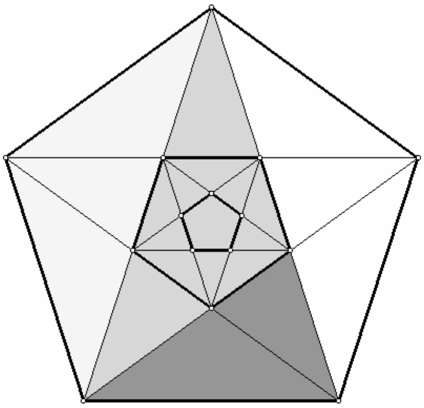


$$d_0 - a_0 = d_1$$
$$a_0 - d_1 = a_1$$
$$d_1 - a_1 = d_2$$
$$a_1 - d_2 = a_2$$
$$\ldots$$

Die Differenz $d_i - a_i = d_{i+1}$ bzw. $a_j - d_{j+1} = a_{j+1}$ kann nie 0 sein, da es sonst nach irgendeinem Schritt nicht mehr möglich wäre, einem Fünfeck ein weiteres Fünfeck einzuschreiben (seine Diagonale bzw. Seite wäre 0).

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{a} \notin \mathbb{Q}$$ □

- Den Zahlenwert von $\frac{d}{a}$ kann man aus ähnlichen Dreiecken bestimmen:



$$\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \qquad \Big| \cdot a \cdot (d-a)$$
$$d \cdot (d-a) = a^2$$
$$d^2 - d \cdot a - a^2 = 0 \qquad \Big| : a^2$$
$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0$$
$$\left(\frac{d}{a}\right)_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ □

Hinweise:

- Die Gleichung $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$ lässt sich auch ohne Bezug auf ein Fünfeck interpretieren:

  Eine Strecke d wird im *goldenen Schnitt* geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Teil a gleich verhält wie der größere Teil zum kleineren.

- Im Gegensatz zu Pentagramm ist *Pentagon* nur ein anderes Wort für Fünfeck, so wie *Polygon* für Vieleck. Bekannt ist vor allem das Pentagon in Arlington (Virginia), Nähe Washington D.C., ein Gebäude mit fünfeckigem Grundriss. Es ist Sitz des US-Verteidigungsministeriums. Die Sterne auf den Flaggen der USA, EU und anderer Länder sind *Pentagramme*.

- Das Wort *Drudenfuß* kommt aus der germanischen Götterwelt. *Trud*, eine Enkelin Odins, beobachtete neugierig - vor allem nachts, in einen dunklen Umhang gehüllt - das Treiben der Menschen durch die Fenster ihrer Häuser. Ihr Gefolge, *Druden* oder *Alben* genannt, brachte dabei den Menschen die *Albträume*. Alben stellte man sich als eine Art von Kobolden oder Dämonen vor, deren Fußabdrücke dem Pentagramm glichen.

Zenon von Elea

In den *Fragmenten der Vorsokratiker* - einer Sammlung von Aussagen der Philosophen vor Sokrates - befindet sich ein Bericht von Aristoteles über Zenon von Elea [5. Jh. v. Chr.]:

- Der zweite Beweis ist der so genannte „Achilleus“. Er zielt dahin, dass das langsamste Wesen im Laufen niemals von dem schnellsten eingeholt werden kann. Der verfolgende Teil muss immer erst zu dem Punkte gelangen, von dem der fliehende schon aufgebrochen ist. Das langsamere Wesen muss also immer einen Vorsprung haben.

  Die Anfänge der abendländischen Philosophie. Fragmente und Lehrberichte der Vorsokratiker. Eingeleitet von Ernst ***Howald****; übertragen von Michael* ***Grünwald****. O.A. <Lizenzausgabe für Buchgemeinschaften>. S 84.*

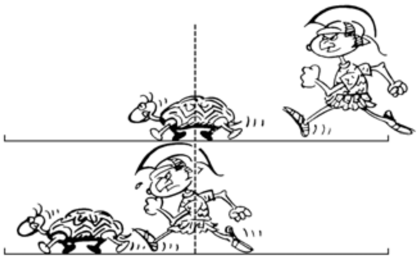


Abb. 9

Am Beispiel des Wettlaufs einer Schildkröte mit dem schnellen griechischen Helden Achilleus zeigt Zenon, dass Achilleus, der der Schildkröte einen Vorsprung gibt, diese nie mehr einholen kann: Erreicht er den Punkt, an dem die Schildkröte war, ist diese schon ein kleines Stück weiter. Daraus schließt er, dass Bewegung überhaupt unmöglich ist.

Zweites Paradoxon: Achilles galt, wie wir wissen, als Schnellfuß, dennoch hätte er, will man Zenon folgen, nicht einmal die allerlangsamste Schildkröte eingeholt. Wir brauchen nur einmal anzunehmen, Achilles sitzt am Punkt A, und die Schildkröte guckt ihn von ferne, nämlich vom Punkt B, an. Der griechische Held schnellt hoch und stürzt sich wie ein Falke auf Punkt B, um die Schildkröte zu fangen. Die hat aber seine bösen Absichten schon erahnt und sich, während Achilles die Strecke A-B überwindet, ein paar Zentimeter fortbewegt und Punkt C erreicht. Achilles stutzt: Unmöglich, dass ich die nicht schnappe! Von seiner Überlegenheit überzeugt, zischt er gleich noch einmal los und versucht, das Tierchen an Punkt C zu erwischen. Doch die Schildkröte hat sich schon wieder wegbewegt und trotz all ihrer Langsamkeit Punkt D erreicht. Man könnte diese Geschichte bis in alle Ewigkeit weiterführen, Achilles wird die Schildkröte nie fangen, es sei denn, sie stirbt vor ihm, und man weiß, wie lange Schildkröten leben, oder aber sie wartet auf ihn irgendwo auf der Strecke. ...

Null und Unendlich sind zwei Zahlen wie alle anderen; sie werden vielleicht von unsereinem nicht so häufig gebraucht, tauchen aber in den Formeln und Gleichungen der Mathematiker ständig auf. Diese beiden seltsamen Zahlen haben jedoch, im Unterschied zu den gewöhnlichen Zahlen, einige außergewöhnliche Eigenschaften. Null multipliziert mit jeder beliebigen Zahl ergibt zum Beispiel immer Null, und auch Unendlich multipliziert mit einer beliebigen Zahl ergibt immer das Ergebnis Unendlich. Also muss man sich fragen, was geschieht, wenn man nun Null mit Unendlich multipliziert? Es geschieht gar nichts; da hier Grenzwerte der Mathematik zusammentreffen, endet das Match unentschieden, und das Ergebnis bleibt unbestimmt, also beliebig. ...

Der Zyniker Antisthenes zum Beispiel konnte die Eleaten und ihre ewigen Beweisführungen gegen die Bewegung nicht ausstehen. Es heißt, er sei eines Tages, als es ihm nicht gelang, Zenon und sein Pfeil-Paradoxon zu widerlegen, dauernd im Raum auf und ab gegangen, bis Zenon schließlich ausrief: „Kannst du nicht einen Augenblick stillstehen?“ „Also gibst du zu, dass ich mich bewege?“ erwiderte da Antisthenes.

Luciano ***De Creszenzo****: Geschichte der griechischen Philosophie. Die Vorsokratiker. Zürich 1990 <Diogenes>. S 122 - 123 / 124 - 125 / 125 - 126.*

Eine Formulierung des Problems, wie sie in einem modernen Schulbuch stehen könnte, lautet z.B.:

- Nach wie vielen Stadien holt Achilleus eine Schildkröte ein, wenn diese ein Stadion Vorsprung hat und Achilleus zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft?

  Eine Antwort gemäß der Vorstellungswelt der alten Griechen müsste lauten: Unendlich viele Strecken, mögen sie auch noch so kurz sein, können keine endliche Länge ergeben.

  Die moderne Mathematik sieht das anders: *Unendliche Summen* erklärt man als *Grenzwerte von Partialsummenfolgen*:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \lim \langle a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots \rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i$$

[9] Quelle: Hansjörg **Kunze**: Physik - compact. Geschichte der Physik Bd. 1. Wien 1990 (1. Aufl.) <hpt>. S 18.

Speziell für *geometrische Folgen*, d.h. Folgen, für die der Quotient aufeinander folgender Glieder konstant ist, gilt $< a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots > =$

$$= < a_0,\ a_1 = a_0 \cdot q,\ a_2 = a_1 \cdot q,\ \ldots,\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \ldots > =$$

$$= < a_0,\ a_1 = a_0 \cdot q,\ a_2 = a_0 \cdot q^2,\ \ldots,\ a_n = a_0 \cdot q^n, \ldots >$$

Den Grenzwert der zugehörigen Partialsummenfolge überlegt man sich *entweder*

$$s_n = a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$|\, q \,| < 1 \ \Rightarrow\ q^{n+1} \to 0 \ \Rightarrow\ s_n \to s_\infty = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad \square$$

oder

Falls s_∞ existiert, dann ist

$$s_\infty = a_0 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = a_0 \cdot (1 + q \cdot (1 + q + q^2 + \ldots)) = a_0 \cdot (1 + \frac{q}{a_0} \cdot a_0 \cdot (1 + q + q^2 + \ldots))$$

$$s_\infty = a_0 \cdot (1 + \frac{q}{a_0} \cdot s_\infty)$$

$$s_\infty = a_0 + q \cdot s_\infty \qquad |\, - \ q \cdot s_\infty$$

$$s_\infty \cdot (1 - q) = a_0 \qquad |\, : \ (1 - q)$$

$$s_\infty = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad \square$$

Keine der Überlegungen ersetzt einen exakten Beweis durch *vollständige Induktio*n, sie liefern aber die entscheidende Idee, wie der Grenzwert - falls er existiert - aussehen muss.

Angewandt auf den Wettlauf mit der Schildkröte ergibt sich für den Weg des Achilleus *entweder*

$$x = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

bzw. analog

$$x = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots = 1{,}111\ldots = 1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}$$

oder aus der Überlegung Weg des Achilleus = Weg der Schildkröte

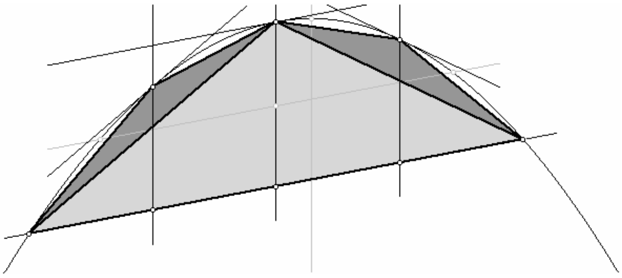
$$x = 1 + \frac{x}{10} \qquad |\, - \ \frac{x}{10}$$

$$\frac{9}{10} x = 1 \qquad |\, \cdot \ \frac{10}{9}$$

$$x = \frac{10}{9}$$

Archimedes

Archimedes von Syrakus [3. Jh. v. Chr.] entwickelte eine Methode zur Flächenberechnung eines Parabelsegments durch Ausschöpfung oder **Exhaustion**.



- Als *Durchmesser* einer Parabel bezeichnet man jede Gerade parallel zur Parabelachse. Die Verbindung der Mittelpunkte paralleler Sehnen ergibt den zur gegebenen Richtung *konjugierten Durchmesser*. Die Tangente im Endpunkt dieses Durchmessers ist parallel zur gegebenen Richtung.
- Archimedes bestimmte mit dieser Methode ein Ausgangs-Dreieck mit Flächeninhalt A_0 (in der Skizze hellgrau dargestellt). Durch fortgesetzte Halbierung der Sehnenstücke erhält man zunächst 2 weitere Dreiecke (in der Skizze dunkelgrau dargestellt) mit Flächensumme A_1, dann 4 weitere noch kleinere Dreiecke usw. Setzt man dieses Verfahren *beliebig lange* fort, kommt man dem wahren Flächeninhalt des Parabelsegments *beliebig nahe*.
- Von den einzelnen Flächeninhalten wusste Archimedes die folgende Eigenschaft:

  1 Dreieck … A_0

  2 Dreiecke … $A_1 = \frac{1}{4}\cdot A_0$

  4 Dreiecke … $A_2 = \frac{1}{4}\cdot A_1 = \frac{1}{16}\cdot A_0$

  ...

  $A = (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots)\cdot A_0$

  Mit Methoden der modernen Mathematik lässt sich A bestimmen als

  $$A = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\cdot A_0 = \frac{4}{3}\cdot A_0 \qquad \square$$

  Archimedes, der diese Methoden noch nicht zur Verfügung hatte und außerdem jede Erwähnung von *unendlich* vermeiden wollte, argumentierte folgendermaßen:

  - $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$ kann nicht größer sein als $\frac{4}{3}$
  - $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$ kann nicht kleiner sein als $\frac{4}{3}$

  Somit gilt: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots = \frac{4}{3}$

- $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$ kann nicht größer sein als $\frac{4}{3}$, denn:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{3}-\frac{1}{3} \\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} &= \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16} &= \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Stets wird also ein positiver Wert von $\frac{4}{3}$ abgezogen.

- $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$ kann nicht kleiner sein als $\frac{4}{3}$, denn:

wäre die Summe kleiner als $\frac{4}{3}$, dann gäbe es einen positiven Unterschied $\frac{4}{3}-(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots)$; gerade diese Differenz wird aber mit jedem Schritt immer kleiner (es wird ja immer mehr abgezogen), d.h. sie unterläuft jeden gegebenen Wert.

- Somit gilt: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{4}{3}$ und $A=\frac{4}{3}\cdot A_0$ □

Euklid

Euklid [4. Jh. v. Chr.] formuliert: Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen (Elemente IX, 20).

- **Primzahlen** sind natürliche Zahlen, die genau 2 Teiler haben: 1 und sich selbst.
- Angenommen, es gäbe endlich viele Primzahlen p_1, p_2, ..., p_n.

  $P=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n+1$ ergibt bei Division durch p_1, p_2, ..., p_n stets den Rest 1, d.h. $P > p_n$ kommt in der Liste p_1, p_2, ..., p_n nicht vor und ist entweder prim oder enthält Primfaktoren, die nicht in der Liste vorkommen.

  Es gibt daher unendlich viele Primzahlen, ihre Anzahl ist „größer als jede vorgelegte Anzahl". □

  Beispiele:

  $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11+1=2311$ ... prim

  $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13+1=30031=59\cdot509$

Hinweise:

- Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Primzahlen kann beliebig groß werden.
  - $\Pi=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p_n \Rightarrow$ die p_n-1 aufeinander folgenden Zahlen $\Pi+2$, $\Pi+3$, $\Pi+4$, ..., $\Pi+p_n$ sind alle zusammengesetzt (teilbar durch 2, 3, 5, ..., p_n).
  - Die $n-1$ aufeinander folgenden Zahlen $n!+2$, $n!+3$, $n!+4$, ..., $n!+n$ sind alle zusammengesetzt (teilbar durch 2, 3, 4, ..., n).
- Eine der bekanntesten ungelösten Fragen der Mathematik ist die **Goldbachsche Vermutung**, benannt nach Christian Goldbach [1690 - 1764]: Jede gerade Zahl > 2 ist auf mindestens eine Art die Summe zweier Primzahlen.

  4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5 = 3 + 7, ...?

Das Symbol ∞

- John **Wallis** [1616 - 1703] war Priester, beschäftigte sich mit Methoden zur Unterrichtung tauber Kinder und galt als Dechiffrier-Experte. Er war ein bedeutender Mathematiker, fand eine Methode für die näherungsweise Berechnung von π

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{8^2}{7\cdot 9}\cdot\ldots = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}$$

  und führte ∞ als das bis heute gebräuchliche Symbol für *unendlich* ein. Seine Überlegungen dazu sind nicht überliefert, doch gibt es mehrere Deutungsversuche:

  - ∞ wurde im alten Rom auch als Symbol für die Zahl 1000 verwendet, eine „sehr große" Zahl.
  - ∞ erinnert an ein liegendes griechisches θ (theta), den Anfangsbuchstaben des Wortes $\theta\varepsilon o\varsigma$, *Gott*.
  - ∞ könnte aus dem kleinen griechischen ω (omega) entstanden sein, dem letzten Buchstaben des griechischen Alphabets und Synonym für *Ende*. Georg Cantor verwendet ω als Symbol für die erste *transfinite Ordinalzahl:* er definiert ω als die kleinste Zahl, die größer ist als jede natürliche Zahl. Seit Cantor verwendet man ∞ hauptsächlich als Symbol für potentielle Unendlichkeit und $\aleph$ als Symbol für aktuale Unendlichkeit.

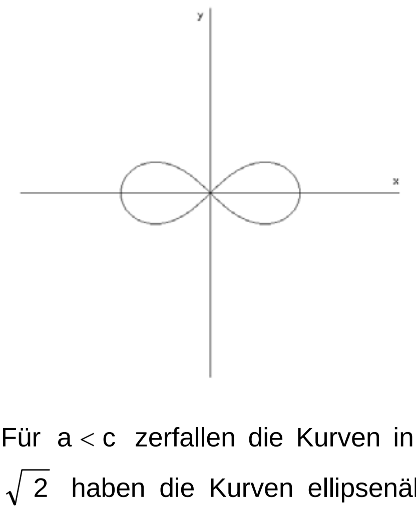
- Als Kurve gesehen ist ∞ eine Bernoullische **Lemniskate -** nach Jakob **Bernoulli** [1655 - 1705] bzw. genauer: Jakob I im Gegensatz zu seinem Großneffen und Physiker Jakob II [1759 - 1809], dem Archäologen Johann Jakob Bernoulli [1831 - 1913] sowie vielen anderen Bernoullis. Die Kurve ist ein Sonderfall der *Cassinischen Kurven*, worunter man die Menge aller Punkte versteht, für die das *Produkt* ihrer Abstände zu zwei festen Punkten konstant ist. Die festen Punkte heißen Brennpunkte (F_1, F_2). Bezeichnet man ihren Abstand mit 2c und das konstante Produkt mit a^2, dann ergibt sich als Gleichung Cassinischer Kurven

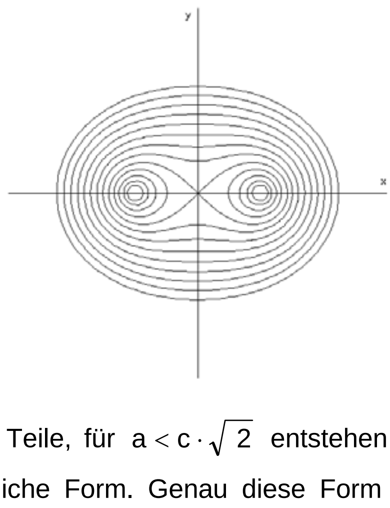
$$(x^2+y^2)^2 - 2\cdot c^2\cdot(x^2-y^2) = a^4 - c^4$$

  Die Bernoullische Lemniskate entsteht für den Sonderfall $c = a$, in diesem Fall vereinfacht sich die Gleichung zu

$$(x^2+y^2)^2 - 2\cdot a^2\cdot(x^2-y^2) = 0$$

  Mit geeigneter Software (Derive, Mathematica, …) lassen sich auch *implizit* gegebene Kurven am PC darstellen.





Hinweis: Für $a < c$ zerfallen die Kurven in 2 Teile, für $a < c\cdot\sqrt{2}$ entstehen Einbuchtungen, für $a > c\cdot\sqrt{2}$ haben die Kurven ellipsenähnliche Form. Genau diese Form war Anlass der Auseinandersetzung zwischen Cassini und Kepler über die wahre Gestalt der Planetenbahnen.

➢ August Ferdinand **Möbius** [1790 - 1868], über die Mutter mit Martin Luther [1483 - 1546] verwandt, beschäftigte sich insbesondere mit Wechselwirkungen von Geometrie und Mechanik und gilt als Pionier der Toplogie (einer Verallgemeinerung der Geometrie). Nach ihm ist unter anderem das *Möbiusband* benannt, eine Fläche mit nur einer Seite und nur einem Rand. Es ist eine Art Verkörperung des Symbols für *unendlich*.

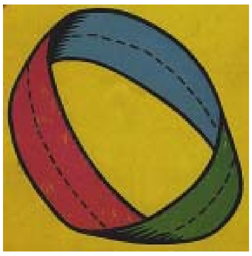


Abb. 10


Abb. 11

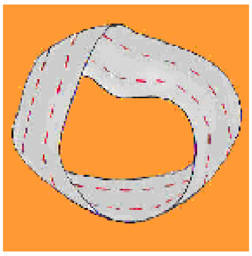


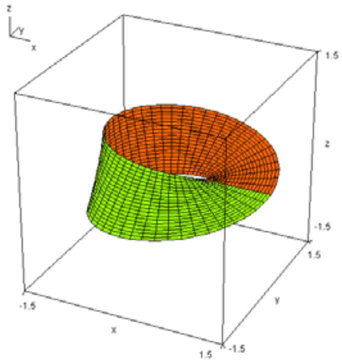
Abb. 12

Man kann es leicht aus Papier herstellen und untersuchen, was passiert, wenn es
- entlang seiner Mittellinie oder
- entlang einer Linie im Abstand von 1/3 seiner Breite zum Rand

zerschnitten wird.

Man kann es aber auch mit Hilfe einer geeigneten Parameterdarstellung und entsprechender Software (Derive, Mathematica, …) am PC darstellen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s)\cdot(1+\frac{t}{2}\cdot\cos(\frac{s}{2})) \\ \sin(s)\cdot(1+\frac{t}{2}\cdot\cos(\frac{s}{2})) \\ \frac{t}{2}\cdot\sin(\frac{s}{2}) \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le s \le 2\pi \text{ und } -1 \le t \le 1$$



Möbiusbänder haben durchaus praktische Anwendungen, z.B. bei *Riemengetrieben*, wenn eine möglichst gleichmäßige Abnutzung erfolgen soll, oder auch als *Schal* in der Mode.


Abb. 13

[10] Bildquelle: http://opik.obs.ee/osa5/ptk01/pildid/moebius.jpg (03.03.2007)
[11] Bildquelle: http://fisicarecreativa.net/matematicalife/imagenes/182b.gif (03.03.2007)
[12] Bildquelle: http://www.lituraterre.org/Moebius-orange.jpg (12.03.2007)
[13] Bildquelle: http://www.arnhild.com/moebius.jpg (12.03.2007)

- Besonders kunstvolle Darstellungen von Möbiusbändern stammen von Maurits Cornelis **Escher** [1898 - 1972]. Der holländische Grafiker schuf viele Werke, die Kunst und Mathematik zugleich sind. Bekannt ist er für seine *Parkettierungen*, d.h. „Füllungen" der Ebene, für seine *Metamorphosen*, für die Darstellung *unmöglicher Objekte*, das Spiel mit den Gesetzen der Wahrnehmung sowie für die kunstvolle Bearbeitung mathematischer Themen.

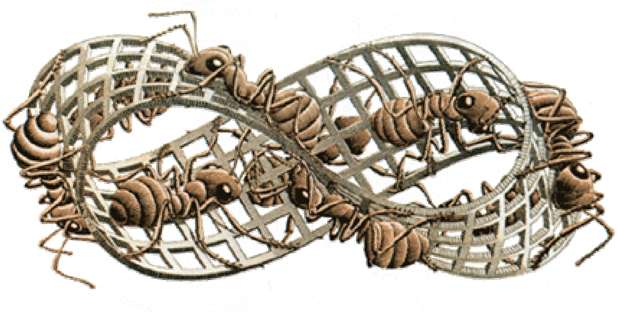


Abb. 14

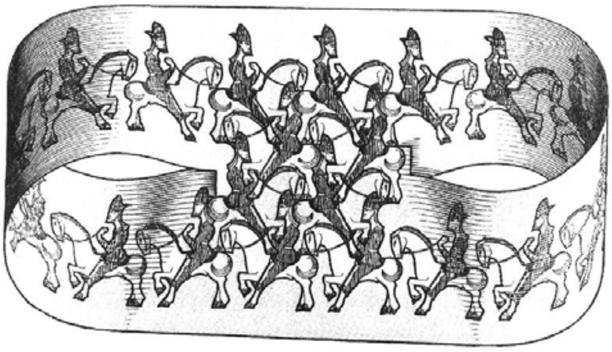


Abb. 15

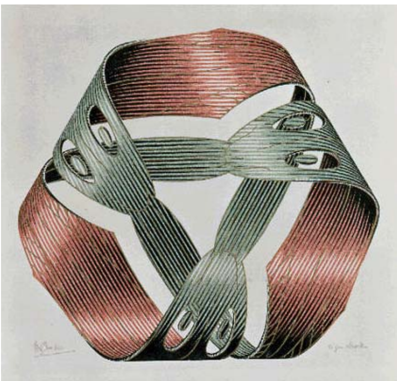


Abb. 16

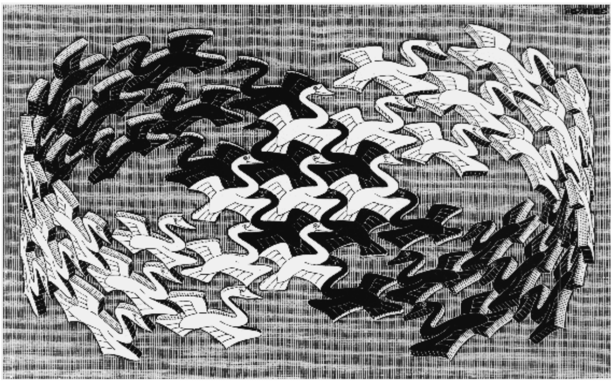


Abb. 17

Aufgabe 4

Welche oben dargestellten Objekte sind *keine* Möbiusbänder?

---

[14] Bildquelle: http://www.fmboschetto.it/tde/striscia_di_Moebius.gif (02.03.2007)
[15] Bildquelle: http://www.math.technion.ac.il/~rl/M.C.Escher/1/escher22.jpg (03.03.2007)
[16] Bildquelle: http://www.mcescher.com/Gallery/recogn-bmp/LW437.jpg (03.03.2007)
[17] Bildquelle: http://www.math.technion.ac.il/~rl/M.C.Escher/1/moebius_birds.gif (03.03.2007)

Georg Cantor

Georg **Cantor** [1845 - 1918] wurde in diesem Skriptum schon mehrfach erwähnt. Er ist vor allem bekannt als Begründer der Mengenlehre.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

GEORG CANTOR in Halle a./S.

(Erster Artikel.)

> „Hypotheses non fingo."
>
> „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."
>
> „Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§ 1.

Der Mächtigkeitsbegriff oder die Cardinalzahl.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $$M = \{m\}.$$

…

Jeder Menge M kommt eine bestimmte ‚Mächtigkeit' zu, welche wir auch ihre ‚Cardinalzahl' nennen.

‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

(3) $$\overline{\overline{M}}.$$

Da aus jedem einzelnen Elemente m, wenn man von seiner Beschaffenheit absieht, eine ‚Eins' wird, so ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{M}}$ selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellectuelles Abbild oder Projection der gegebenen Menge M in unserm Geiste Existenz hat.

Zwei Mengen M und N nennen wir ‚äquivalent' und bezeichnen dies mit

(4) $$M \sim N \quad \textit{oder} \quad N \sim M,$$

wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht.

…

Abb. 18 [Mathematische Annalen XLVI, S 481 - 512. Halle 1895]

---

[18] Quelle: http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?ht=VIEW&did=D36175&p=499 (02.03.2007)

Schon Georg Cantor war sich der Tatsache bewusst, dass nicht *jede* Zusammenfassung von Objekten eine Menge sein kann, z.B. gibt es keine Menge aller Mengen (vgl. S 14), ebenso wenig eine Menge aller Kardinal- oder Ordinalzahlen.

Dennoch war die Entwicklung der Mengenlehre ein wichtiger Schritt zur *Exaktifizierung* der Mathematik und machte erstmals *unendlich* (∞ und $\aleph$) zu einem Gegenstand mathematischer Untersuchung.

Wie oft bei der Entwicklung neuer Theorien lag der entscheidende Fortschritt zunächst in einem Wechsel des Standpunktes oder Blickwinkels, der sich dann als geeignete Verallgemeinerung bisheriger Konzepte erwies. Insbesondere ersetzte Cantor

- Abzählen durch vergleichende **Paarbildung** und betrachtete
- **Mächtigkeit** anstelle von Anzahl.

Cantors Zeitgenossen waren sich über die Bedeutung der Mengenlehre als Grundlage moderner Mathematik keineswegs einig, besonders sein ehemaliger Lehrer Leopold Kronecker [1823 - 1891] bezeichnete Cantors Arbeit als Humbug, nannte ihm einen „Jugendverderber", verhinderte eine von Cantor angestrebte Berufung nach Berlin und versuchte, wann immer es ihm möglich war, eine Veröffentlichung von Cantors Arbeiten zu verhindern. Vielleicht auch deshalb verbrachte Cantor, der vermutlich an einer manisch-depressiven Störung litt, in Summe mehrere Jahre in der Psychiatrie der Halle'schen Universitätsklinik - wobei auffälligerweise stationäre Aufenthalte immer dann erforderlich waren, wenn Cantor intensiv an der Kontinuumshypothese arbeitete.

- Jules-Henri **Poincaré** [1854 - 1912]: Spätere Generationen werden die Mengenlehre als Krankheit ansehen, die man überwunden hat
- David Hilbert [1862 - 1943]: Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

Die moderne Mathematik entdeckte Cantor neu als Erfinder des wahrscheinlich ältesten *Fraktals*, einer nirgends dichten Punktmenge mit „gleich vielen" Punkten wie ganz $\mathbb{R}$. Sie ist als **Cantor-Menge** oder auch **Cantorsches Diskontinuum** bekannt.

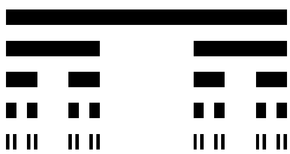


Abb. 19

Als *Cantor-Menge* bezeichnet man die Menge aller Punkte, die *am Ende* folgender Konstruktion übrig bleiben: Beginne mit einem Intervall - z.B. [0;1] - und entferne aus jedem Intervall, das noch übrig ist, das offene mittlere Drittel - oder noch mehr, z.B. die mittleren 80%, d.h. alle Zahlen aus] 0,1 ; 0,9 [; das sind alle Zahlen, deren erste Nachkommastelle mit einer anderen Ziffer als 0 oder 9 beginnt (0,1 stellt man periodisch als 0,0999… und 1 als 0,999… dar).

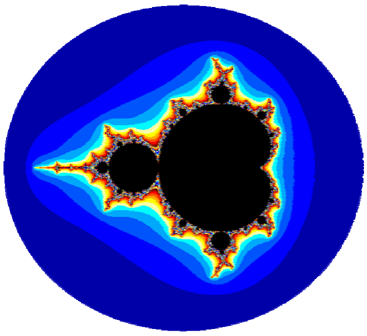
Am Ende bleiben *alle* Zahlen übrig, deren Nachkommastellen nur aus den Ziffern 0 und 9 bestehen - das sind *mehr* als nur die Randpunkte der entfernten Intervalle, z.B. auch 1/11 = 0,090909…

Denkt man jede 9 durch 1 ersetzt, erhält man alle Zahlen, deren Nachkommastellen nur aus 0 und 1 bestehen. Dies kann man als binäre Darstellung interpretieren. Da aber jede reelle Zahl aus [0;1] eine binäre Darstellung besitzt, hat das Cantorsche Diskontinuum die gleiche Mächtigkeit wie das Intervall [0;1] und damit ganz $\mathbb{R}$.

[19] Bildquelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/1/1a/Cantor.png (12.03.2007)

Fraktale

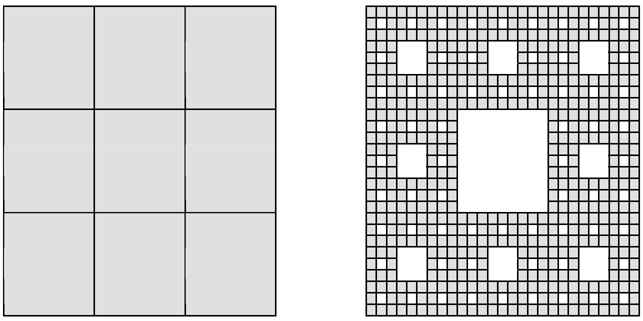
Der Begriff *Fraktal* wurde 1975 von Benoît B. **Mandelbrot** [1924 -] geprägt, dem Entdecker des *Apfelmännchens*, international eher *Mandelbrot-Menge* genannt.



Hinweis: Das Innere der Mandelbrot-Menge ist die Menge aller Punkte c der komplexen Ebene, die bei der Iteration $z(n) = z(n-1)^2 + c$ mit Startwert $z(0) = 0$ *nicht* nach unendlich laufen. Alle diese Punkte liegen innerhalb eines Kreises mit Radius 2 um den Ursprung.

Wie *Fraktur* oder das englische *fraction* kommt auch *Fraktal* vom lateinischen *frangere*, brechen. Typische Merkmale von Fraktalen sind die Rauheit der Struktur sowie die Skaleninvarianz oder *Selbstähnlichkeit*. Für Mandelbrot waren Fraktale der Anlass, die gewohnte Unterscheidung von 1-, 2- oder 3-dimensionalen Objekten weiterzuentwickeln: Fraktale haben eine **gebrochene Dimension**.

Betrachten wir zunächst ein Quadrat, das aus 9 kleineren Quadraten zusammengesetzt ist. Entfernt man immer wieder das Mittelquadrat aus jedem noch übrigen Quadrat, so erhält man einen **Sierpinski-Teppich** mit einer Dimension zwischen 1 und 2.



Man kann die Teilquadrate als *Bilder* des großen Quadrates interpretieren, hier als Verkleinerungen im Maßstab 1 : 3, wobei links das Ausgangsquadrat gerade $3^2 = 9$ Bildquadrate enthält. Die Hochzahl 2 ist die Dimension eines Quadrats. Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern: Wird ein Objekt im Maßstab 1 : k verkleinert und enthält das Ausgangsobjekt gerade n Bildobjekte, so ist die **Dimension** des Objektes jene Zahl d, für die $k^d = n$ gilt.

Beispiel: Welche Dimension hat die Mittel-Drittel Cantor-Menge bzw. ein Sierpinksi-Teppich?

[**Lösungen:**

Cantor-Menge: Der Verkleinerungsmaßstab ist 1 : 3, die Ausgangsstrecke enthält jeweils 2 Verkleinerungen ihrer selbst, daher gilt:

$3^d = 2 \quad | \log$

$d \cdot \log 3 = \log 2 \quad | : \log 3$

$d = \dfrac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}631$

Sierpinski-Teppich: Der Verkleinerungsmaßstab ist 1 : 3, das Ausgangsquadrat enthält jeweils 8 Verkleinerungen seiner selbst, daher gilt:

$3^d = 8 \quad | \log$

$d \cdot \log 3 = \log 8 \quad | : \log 3$

$d = \dfrac{\log 8}{\log 3} \approx 1{,}893$]

Grenzwerte

Im Schulunterricht begegnet man *unendlich* am ehesten in Zusammenhang mit **Grenzwerten**, d.h. der *potentiell* beliebigen Annäherung an einen bestimmten Wert.

Folgen und Reihen

Jede *Nummerierung* von Zahlen bringt diese in eine bestimmte Reihenfolge, man kann daher reelle Zahlenfolgen als Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ betrachten, z.B.:

- <1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …> … $a(n) = \frac{1}{n} \mid n \geq 1$ … *explizite* Darstellung
- <1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …> … $\begin{cases} a(n) = a(n-1) + a(n-2) \\ \text{Startwerte: } a(1) = a(2) = 1 \end{cases}$ … *rekursive* Darstellung

Manche dieser Folgen kommen einer Grenze beliebig nahe, z.B. <1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …> $\to$ 0.

Definition: Die Zahl a heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge <a(n)>, wenn in jeder (noch so kleinen) Umgebung von a *fast alle* Glieder der Folge liegen, d.h. alle bis auf (höchstens) endlich viele Ausnahmen bzw. alle ab einer bestimmten Nummer.

$$a = \lim_{n \to \infty} a(n) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon: \ \forall\, n \geq n_\varepsilon: \ a - \varepsilon < a(n) < a + \varepsilon$$

oder mit Betrag formuliert: $|\, a(n) - a \,| < \varepsilon$

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, heißt sie **konvergent**, sonst **divergent**.

Beispiel: Zeige: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

[**Lösung:**

Sei $\varepsilon > 0$. Wir vermuten a = 0, zu zeigen ist daher: $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$

- linke Seite : $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n}$ ✓
- rechte Seite : $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad | \cdot n$

$1 < \varepsilon \cdot n \quad | : \varepsilon$

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

Für sehr kleine Werte von ε wird 1/n sehr groß, dennoch ist die Ungleichung sicher für *fast alle* Werte von n erfüllt. □

]

Hinweise:

- Die Fortsetzung von Folgen mit gegebenen Startwerten - z.B. <3, 1, 4, 1, 5, …> - ist eine beliebte Frage in Intelligenztestes, aber: zu jeder Vorgabe gibt es *viele* denkbare Fortsetzungen. Man kann z.B. in der Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen nach vorgegebenen Sequenzen in mathematisch relevanten Zahlenfolgen suchen. url: http://www.research.att.com/~njas/sequences/
- Jeder Zahlenfolge lässt sich eine **Reihe** zuordnen, indem man die Folge ihrer *Partialsummen* bildet. *Unendliche Summen* sind die Grenzwerte solcher Reihen (vgl. S 18 - 21).

Friedrich Wille

Zahlenfolgen

Will man Analysis betreiben,
muss man gelegentlich was schreiben;
wir schreiben daher zu Beginn
uns ein paar schlichte Zahlen hin:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \qquad (1)$$

Wie rechts es immer weiter geht,
sich sicherlich von selbst versteht:
Ein sechstel steht an sechster Stell,
an siebter dann ein siebentel,
und was nun niemand mehr verwundert:
ein hundertstel steht bei Platz hundert.
Kurzum, an n-ter Position,
das wissen wir jetzt alle schon,
muss stets die Zahl ein n-tel steh'n,

$$\frac{1}{n}.$$

Wie schön, wie schön, wie schön, wie schön!

Das, was soeben hier beschrieben,
wo ihr gefolgt seid mir, ihr Lieben,
wird eine *Folge* kurz genannt
von Bayern bis zur Waterkant.

Auch bei den nächsten Folgen hier
reicht wieder rechts nicht das Papier:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \qquad (2)$$

$$2, 4, 6, 8, \ldots \qquad (3)$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad (4)$$

$$1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{7}, 1, \ldots \qquad (5)$$

(Man füg' an jeder, wenn man kann,
zum Spaß sechs weit're Zahlen an!)

Ganz allgemein schreibt Folgen man
in folgender Gestalt gern an:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

wie auch auf etwas kürz're Art

$$(a_n),$$

wobei man gleich Papier einspart.

Die Folgen (1) bis (4) erhalten
auf diese Weise die Gestalten

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right), (2n), ((-1)^n),$$

dieweil die fünfte Folge man
z.B. so beschreiben kann:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls n gerade} \\ \dfrac{n}{n+1}, & \text{falls n ungerade} \end{cases}$$

Wie ich mir eine Folge mal'
ist letzten Endes ganz egal,
sofern man nur dabei begreift,
wie diese läuft und läuft und läuft,

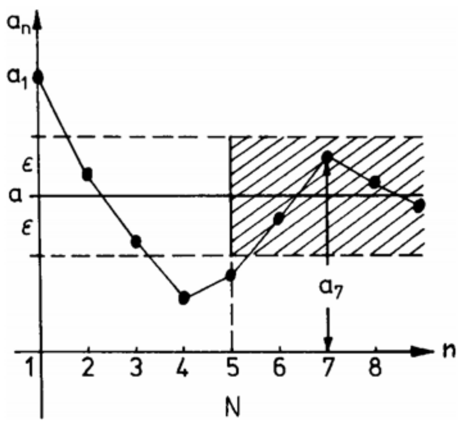
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

d.h. wie jedem n dabei
ein a_n zugeordnet sei.
Das n durchläuft vergnügt und heiter
dabei die ganze Zahlenleiter
1, 2, 3, 4, 5, ... usw.
Nun sind wir schon ein Stück gescheiter.

Die Zahlenfolgen laufen, laufen,
fast wie beim Sommerschluss-Verkaufen.
Was hat das nur für einen Sinn?
Wo laufen denn die Folgen hin?

Gar manche machen wilde Sprünge
und and're ausgeflippte Dinge,
Doch einige, in stiller Ruh,
sie »streben einem Grenzwert zu«.

Sie »konvergieren«, sagt man auch
(das ist schon lange Zeit so Brauch).
Was aber heißt, »sie konvergieren?«
Das will ich kurz euch definieren:



»Zu jeder positiven Zahl
- ich nenn sie ε einmal -
gibt es ein positives N,
für das ich folgendes erkenn':

$$\forall n > N: \ |a_n - a| < \varepsilon.«$$

In Formelzeichen, wie durchtrieben,
wird dies erstaunlich kurz beschrieben:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Auch wird dies so symbolisiert:

$$a_n \to a \ \text{ für } \ n \to \infty,$$

wie auch in Kurzform aufnotiert:

$$a_n \to a.$$

So einfach alles dies gesagt,
so schwer sich mancher damit plagt.
Drum lieber Leser, sei recht pfiffig,
und mach' dir's an Exempeln griffig.

Zum Beispiel Folgen (1) und (2),
sie streben munter, eins, zwei, drei,
zum Grenzwert Null, das sieht man schon.
Prüf's nach mit N und ε.

Bei (3), (4) ist man angeschmiert,
weil überhaupt nichts konvergiert.
Guckt man sich auch die Augen aus,
kein Grenzwert springt dabei heraus.
Man möchte fast den Mut verlieren,
denn diese Folgen »divergieren.«

Die Folge (5) dagegen strebt,
was uns're Stimmung merklich hebt,
zum Grenzwert 1, ihr sei's gedankt,
obwohl sie dabei etwas schwankt.

Der Leser such' sich weit're Fälle,
jongliere sie wie Zirkusbälle,
hol' N und ε herbei,
vermische dies zu einem Brei,
der klumpenfrei ist, schlank und glatt,
bis alles er verstanden hat.

Der junge Math'matik-Student,
der dies begriffen hat und kennt,
der hat ein sich'res Fundament,
wenn frohgemut er weiter rennt.

*Friedrich **Wille**: Humor in der Mathematik. Eine unnötige Untersuchung lehrreichen Unfugs, mit scharfsinnigen Bemerkungen, durchlaufender Seitennummerierung und freundlichen Grüßen. Göttingen 1992 (4. Aufl.) <Vandenhoeck & Ruprecht>. S 38 - 41.*

Aufgabe 5

Zwei Züge sind 100 km voneinander entfernt und fahren mit konstant 50 km/h aufeinander zu. Einer Fliege, die auf einer der Lokomotiven sitzt, ist das zu langsam; sie fliegt ihrem Zug mit konstant 80 km/h voraus, erreicht die andere Lokomotive und kehrt sofort wieder um usw. Sie fliegt hin und her, bis die Züge einander begegnen. Welchen Weg legt sie dabei zurück?

> *Laut einer Anekdote lösen üblicherweise Physiker solche Aufgaben sehr viel schneller als Mathematiker - nur John **von Neumann** [1903 - 1957], ein Mathematiker mit legendären Fähigkeiten im Kopfrechen war noch schneller. Auf die Entgegnung des Fragestellers: „Seltsam, normalerweise brauchen Mathematiker doch viel länger, weil sie die unendliche Summe aller Wegstücke berechnen!“ soll von Neumann geantwortet haben: „Wieso seltsam? Genau so habe ich es gemacht!“*

Welcher einfache Weg führt zur Lösung?

[**Lösung:** Die Züge begegnen einander in genau 1 Stunde; die Fliege legt in dieser Zeit 80 km zurück, da sie ja mit 80 km/h unterwegs ist.]

Hinweise:

- Physiker mögen vielleicht die einfache Lösung der obigen Aufgabe schneller sehen, dafür haben sie oft Probleme mit Grenzwerten - in der Physik spricht man von **Singularitäten**, wenn im Grenzfall physikalische Gesetze ihre Gültigkeit verlieren. Z.B. berechnet man die Kraft, mit der zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 im Abstand r einander anziehen, mit Hilfe des Newton'schen Gravitationsgesetzes:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Die Gravitationskonstante G wurde erstmals von Henry Cavendish [1731 - 1810] mit Hilfe einer Drehwaage gemessen. Ihr Wert beträgt $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2 kg^{-2}}$.

Klarerweise verliert das Gesetz seine Gültigkeit, wenn die beiden Körper einander berühren.

- Schüler/innen und Lehrer/innen wiederum scheinen ihre eigenen Sorgen mit Grenzwerten zu haben, zumindest wenn man folgendem Zitat Glauben schenkt:

Die Schüler hören die Hälfte von dem, was der Lehrer sagt, sie begreifen die Hälfte von dem, was sie gehört haben, sie behalten die Hälfte von dem, was sie begriffen haben, und sie nutzen die Hälfte von dem, was sie behalten haben - also letzten Endes herzlich wenig.

***François Lelord**: Hector und die Entdeckung der Zeit. München 2006 <Piper>. S 35.*

Stetigkeit

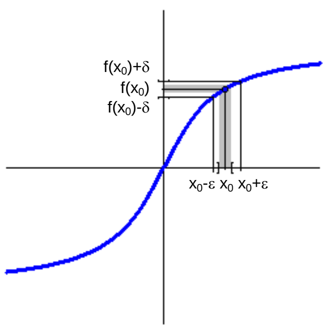
Stetigkeit ist eine zentrale Eigenschaft von Funktionen. Die anschauliche Erklärung lautet: Eine Funktion ist stetig, wenn sich ihr Graph ohne Absetzen *in einem Zug* zeichnen lässt. Die mathematische Definition dagegen verwendet wieder den Begriff der Umgebung: zieht sich eine Umgebung einer Stelle x_0 auf diesen Wert x_0 zusammen, dann konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte - bei stetigen Funktionen - gegen $f(x_0)$.

Definition: Eine reelle Funktion f heißt **stetig** an der Stelle x_0, wenn gilt:

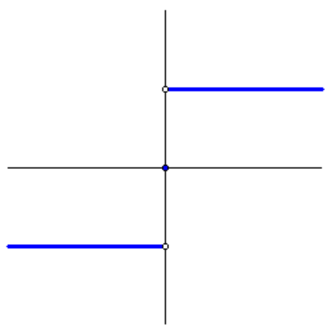
$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, \varepsilon > 0:\ \forall\, x:\ |x - x_0| < \varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

oder mit Limes formuliert: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Beispiel:



f(x) = arctan(x) … überall stetig



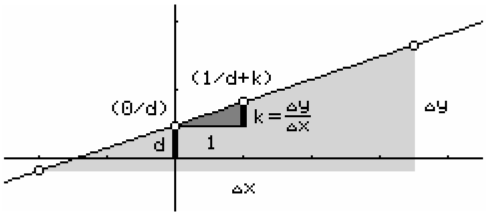
f(x) = sgn(x) … unstetig bei x = 0

Differentialquotienten

➢ Wie groß ist die Steigung einer Geraden? Z.B. bedeutet die folgende Angabe:

Abb. 20

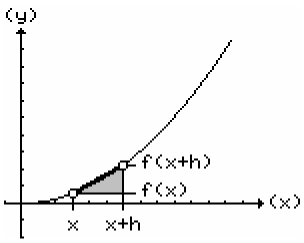
Die Straße überwindet 12 m Höhenunterschied auf 100 m Basislänge. In der Mathematik ist es allerdings üblich, diesen Wert ohne Prozente anzugeben, die Steigung k einer Geraden wird als Verhältnis von Höhenunterschied zu Basislänge definiert - wobei es viele Möglichkeiten gibt, dies als Formel anzuschreiben.



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \tan\alpha$$

➢ Wie groß ist die Steigung einer Funktion? Die Frage muss zunächst lauten: Wie groß ist die Steigung *an einer bestimmten Stelle* x_0, denn im allgemeinen Fall bleibt die Steigung nicht konstant. Ordnet man jedem x den Wert der Steigung an dieser Stelle zu, kommt man zur **Ableitung(sfunktion)** f' einer gegebenen Funktion f. Dabei gibt es allerdings (mindestens) zwei Probleme:

1. Wie erklärt man *Steigung an einer Stelle x_0*? Antwort: Die Steigung an einer Stelle x_0 entspricht der Steigung der *Tangente* an dieser Stelle. Diese Erklärung rückt vor allem den Aspekt der *Linearisierung* in den Vordergrund: jede stetige Funktion kann in einer kleinen Umgebung eines Punktes durch die Tangente in diesem Punkt approximiert werden.
2. Wie berechnet man die Steigung der Tangente in einem Punkt? Es gibt ja nur *einen* Berührpunkt und daher keine Möglichkeit, Höhenunterschied oder Basislänge aus einem Steigungsdreieck zu ermitteln. Antwort: Man wählt einen zweiten Punkt „in der Nähe" des Berührpunktes, ersetzt die Tangente vorerst durch eine Sekante und berechnet den Grenzwert der Sekantensteigungen, wenn dieser zweite Punkt immer näher an den ersten heranrückt.



*Sekanten*steigung = *Differenzen*quotient:

$$k = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

*Tangenten*steigung = *Differential*quotient:

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

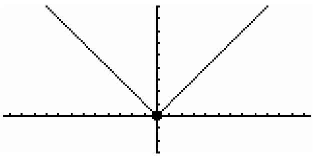
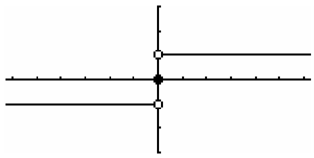
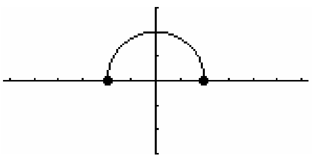
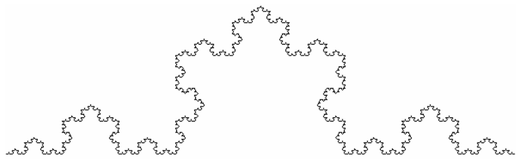
[20] Bildquelle: http://www.baukreis.de/produkte/images/bkAD/bkAD_11058_g.gif (18.03.2007)

➢ Auch hier gibt es verschiedene abkürzende Schreibweisen:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\partial}{\partial x}f(x)=f'(x)=y'=\dot{f}(x)=\dot{y}$$

Entwickelt wurde dieses Konzept des Differentialquotienten - unabhängig voneinander - von Sir Isaac **Newton** [1643 - 1727] und Gottfried Wilhelm **Leibniz** [1646 - 1716]. Leibniz hatte dabei tatsächlich das Problem der *Tangentensteigung* im Auge, Newton dachte an das Problem der *Momentangeschwindigkeit*. Da jedoch Geschwindigkeit als Steigung eines Funktionsgraphen in einem Zeit-Ort-Diagramm interpretiert werden kann, sind die Fragestellungen und auch die Lösungen in Wahrheit gleichwertig. Allgemein gilt: Ein *Differenzen*quotient bestimmt die *durchschnittliche* oder *mittlere* Änderung einer Größe in einem Intervall, ein *Differential*quotient die *momentane* Änderung dieser Größe.

➢ Besitzt überhaupt jede Funktion eine Albleitung? Mit anderen Worten: Wie sehen Funktionen aus, die keine Tangente besitzen - an einzelnen Stellen oder nirgends? Beispiele:

 $y1=\lvert x\rvert$ Betragsfunktion: nicht differenzierbar bei x = 0	 $y2=\begin{cases}-1, x<0\\ \begin{cases}0, x=0\\ 1, \text{else}\end{cases}, \text{else}\end{cases}$ Signumfunktion: nicht differenzierbar bei x = 0
 $y3=\sqrt{4-x^2}$ Halbkreis: nicht differenzierbar bei $x=\pm 2$	 Koch'sche Kurve, Schneeflockenkurve überall stetig, nirgends differenzierbar

Beispiel: Ermittle die Gleichung der Tangente an die Funktion f: $y=5x^2$ im Punkt P(1/y).

[**Lösung:**

$f(1)=5 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P(1/5)}}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(x+h)^2-5\cdot x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(x^2+2\cdot h\cdot x+h^2)-5\cdot x^2}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(x^2+2\cdot h\cdot x+h^2-x^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(2\cdot h\cdot x+h^2)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot h\cdot(2\cdot x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}5\cdot(2\cdot x+h)=\underline{\underline{10\cdot x}}$

$k=f'(1)=\underline{10}$

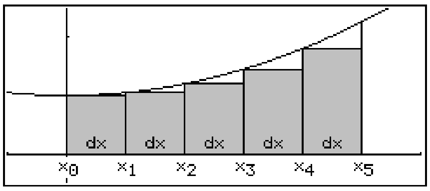
$y=k\cdot x+d \;\Rightarrow\; 5=10+d,\;\; d=\underline{-5}$

t_P: $\underline{\underline{y=10\cdot x-5}}$]

Bestimmtes und unbestimmtes Integral

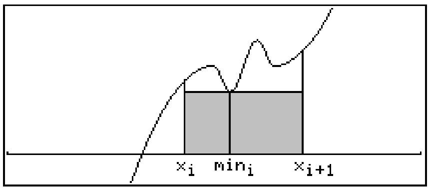
- Wie kann man den Flächeninhalt zwischen einer Funktion f und der x-Achse zwischen den Grenzen a und b bestimmen? Man ersetzt die Fläche durch möglichst viele möglichst schmale Rechtecke gleicher Breite, die entweder über oder unter der tatsächlichen Fläche liegen:

Untersumme: Fläche aus der *Sicht des Käufers*



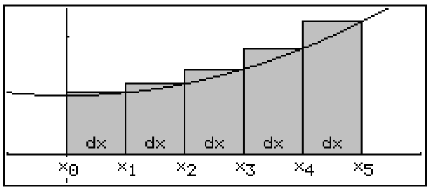
$$A \approx U = f(x_0)\cdot dx + f(x_1)\cdot dx + \ldots + f(x_4)\cdot dx = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)\cdot dx$$

allgemein gilt ($a = x_0$, $b = x_n$):



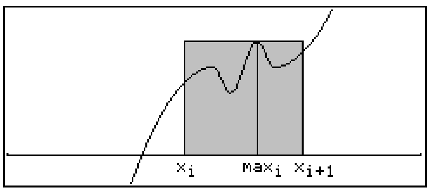
$$U = \sum_{i=0}^{n-1} f(\min_i)\cdot dx$$

Obersumme: Fläche aus der *Sicht des Verkäufers*



$$A \approx O = f(x_1)\cdot dx + f(x_2)\cdot dx + \ldots + f(x_5)\cdot dx = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\cdot dx$$

allgemein gilt ($a = x_0$, $b = x_n$):



$$O = \sum_{i=1}^{n} f(\max_i)\cdot dx$$

Fläche: Bildet man den Grenzwert für dx → 0, wird für stetige Funktionen auch die Differenz von Ober- und Untersumme 0 und man erhält - eigentlich als *Definition* für A

$$A = \lim_{dx\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot dx = \lim_{dx\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot dx = \lim_{dx\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(min_i)\cdot dx = \lim_{dx\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(max_i)\cdot dx$$

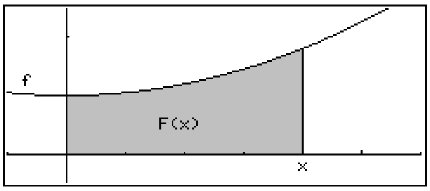
Man schreibt für $\lim\limits_{dx\to 0} \sum\limits_{i} f(x_i)\cdot dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ und bezeichnet den Ausdruck als **bestimmtes Integral** der Funktion f von a bis b.

Das Symbol ∫ erinnert an ein S und steht ja auch für die Summe *unendlich* vieler *unendlich* dünner Rechtecksflächen, wobei f(x) dx den Flächeninhalt eines dieser Rechtecke angibt. In der Literatur unterscheidet man meist zwischen der Rechtecksbreite Δx *vor* und dx *nach* der Grenzwertbildung.

- Dieses Konzept des bestimmten Integrals als Grenzwert von Summen geht auf Bernhard **Riemann** [1826 - 1866] zurück. Auch hier gibt es viele Anwendungen, die nicht unbedingt in geometrischen Zusammenhängen auftreten. Z.B. kennt man aus der Physik die Formel $s = v\cdot t$ - wobei die Geschwindigkeit v entweder konstant ist oder als Durchschnittsgeschwindigkeit interpretiert wird. Ändert sich die Geschwindigkeit, erhält man den Weg *näherungsweise* als Summe möglichst vieler möglichst kurzer Zeitintervalle bzw. *exakt* als Grenzwert für Δt → 0, also

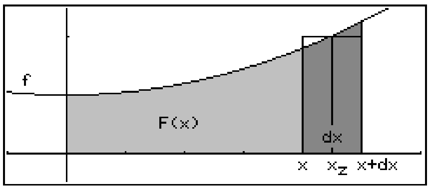
$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,.$$

- Mit Hilfe des **bestimmten Integrals** lassen sich also insbesondere Flächeninhalte zwischen einer Funktion f und der x-Achse ermitteln. Wir bezeichnen als *Flächeninhaltsfunktion* F jene Funktion, die jedem x den Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse zwischen den Grenzen 0 und x zuordnet.



Weiters bezeichnet man als **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f jede Funktion, deren Ableitung die gegebene ist - z.B. ist $F(x) = 5x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 10x$ (vgl. S 33).

Existiert ein Zusammenhang von bestimmtem und unbestimmtem Integral? Ja, denn: Jede Flächeninhaltsfunktion F von f ist eine Stammfunktion von f. Für die Begründung dieser Aussage braucht man wieder den Grenzwert-Begriff.



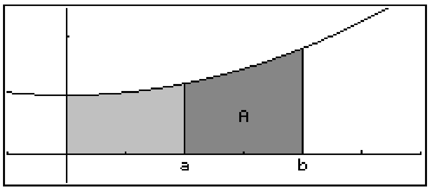
Wir betrachten den Flächeninhalt zwischen den Grenzen 0 und x + dx, also einer Nachbarstelle von x, und ersetzen das neue Flächenstück (dunkelgrau) durch ein flächengleiches Rechteck. Seine Länge oder besser Höhe entspricht dem Funktionswert an einer Zwischenstelle x_z.

$$F(x+dx) = F(x) + f(x_z)\cdot dx \qquad \big|\ -F(x)\ \big|\ :dx$$

$$\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = f(x_z) \qquad \big|\ \lim_{dx\to 0}$$

$$F'(x) = f(x)$$

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** formuliert diesen Zusammenhang von bestimmtem und unbestimmtem Integral für beliebige Grenzen a und b:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Beispiel: Ermittle den Flächeninhalt zwischen f: $y = \frac{1}{8}\cdot(x^3 - 6x^2 + 20x)$ und der x-Achse zwischen den Grenzen 1 und 3 näherungsweise als Mittelwert von Unter- und Obersumme.

Verwende zunächst 10, dann 100 gleich breite Intervalle. Wie lassen sich die auffälligen Ergebnisse erklären? Ermittle Unter- und Obersumme auch allgemein für n gleich breite Intervalle und bilde jeweils den Limes für $n \to \infty$.

[**Lösung:**

10 Streifen

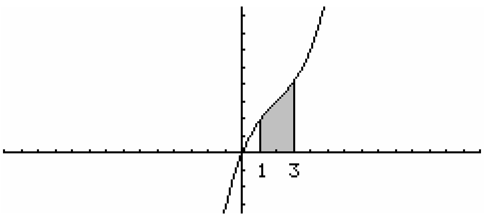
$$x_i = 1 + i\cdot\frac{2}{10}, \quad dx = \frac{2}{10}$$

$$U_{10} = \sum_{i=0}^{9} f(1+i\cdot\frac{2}{10})\cdot\frac{2}{10} = 5{,}775, \quad O_{10} = \sum_{i=1}^{10} f(1+i\cdot\frac{2}{10})\cdot\frac{2}{10} = 6{,}225, \quad A \approx \frac{U+O}{2} = 6$$

100 Streifen

$$x_i = 1 + i\cdot\frac{2}{100}, \quad dx = \frac{2}{100}$$

$$U_{100} = \sum_{i=0}^{99} f(1+i\cdot\frac{2}{100})\cdot\frac{2}{100} = 5{,}9775, \quad O_{100} = \sum_{i=1}^{100} f(1+i\cdot\frac{2}{100})\cdot\frac{2}{100} = 6{,}0225, \quad A \approx \frac{U+O}{2} = 6$$



Erklärung

Durch die Punktsymmetrie der Funktion bezüglich des Wendepunktes W(2/3) und die Wahl der Grenzen symmetrisch zu W heben sich die Fehler auf, und zwar unabhängig von der Anzahl der Streifen. Das arithmetische Mittel von Unter- und Obersumme liefert hier also stets den exakten Flächeninhalt. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall.

n Streifen

$$x_i = 1 + i\cdot\frac{2}{n}, \quad dx = \frac{2}{n}$$

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(1+i\cdot\frac{2}{n})\cdot\frac{2}{n} = 6 - \frac{9}{4n}, \quad O_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(1+i\cdot\frac{2}{n})\cdot\frac{2}{n} = 6 + \frac{9}{4n}, \quad \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = 6$$]

Stochastik

In der Stochastik unterscheidet man zwischen Zufallsexperimenten mit *endlich* vielen Versuchsausgängen, z.B. der Ziehung einer Lottokugel aus einer Urne mit 45 Kugeln, und solchen mit *unendlich* vielen Versuchsausgängen, z.B. der Wahl eines beliebigen Punktes innerhalb eines Kreises oder Quadrats. Entsprechend unterscheidet man Verteilungen von *diskreten* und *kontinuierlichen* Zufallsvariablen. Bekannte Beispiele diskreter Verteilungen sind etwa die *hypergeometrische Verteilung* für Ziehungen von n Elementen *ohne* Zurücklegen oder die *Binomialverteilung* für Ziehungen *mit* Zurücklegen; das bekannteste Beispiel einer *kontinuierlichen* Verteilung ist wohl die Normalverteilung, gegen die alle anderen für $n \to \infty$ konvergieren. In jedem Fall ist die *Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses eine Zahl zwischen 0 und 1.

Nur in der Science Fiction Literatur gibt es so etwas wie unendliche Unwahrscheinlichkeit!

Der unendliche Unwahrscheinlichkeitsdrive ist eine neue, hinreißende Methode, riesige interstellare Entfernungen ohne das ganze langweilige Herumgehänge im Hyperraum zurückzulegen.

Entdeckt wurde er durch einen glücklichen Zufall, zu einem brauchbaren Antrieb weiterentwickelt wurde er dann vom Galaktischen Staatlichen Forschungsteam auf Damogran.

Das ist in der gebotenen Kürze die Geschichte seiner Entdeckung.

Das Prinzip, kleine Mengen *endlicher* Unwahrscheinlichkeit herzustellen, indem man einfach die Logikstromkreise eines Sub-Meson-Gehirns Typ Bambelweeny 57 mit einem Atomvektoren-Zeichner koppelte, der wiederum in einem starken Braunschen Bewegungserzeuger hing (sagen wir mal, einer schönen heißen Tasse Tee), war natürlich allenthalben bekannt - und solche Generatoren wurden oft dazu benutzt, auf Partys Stimmung zu machen, indem man analog der Indeterminismustheorie alle Unterwäschemoleküle der Gastgeberin plötzlich einen Schritt nach links machen ließ.

Viele berühmte Physiker sagten, sie könnten nichts von alldem vertreten, zum Teil, weil es eine Herabwürdigung der Wissenschaft darstelle, vor allem aber, weil sie zu solchen Partys nie eingeladen wurden.

Etwas anderes, was sie nicht ertrugen, war das dauernde Scheitern ihrer Bemühungen, einen Apparat zu bauen, der das *unendliche* Unwahrscheinlichkeitsfeld erzeugen könnte, mit dem ein Raumschiff die irrwitzigen Entfernungen zwischen den entlegensten Sternen in Nullkommanix zurücklegen würde. Und so verkündeten sie schließlich mürrisch, so einen Apparat zu bauen sei im Grunde unmöglich.

Darauf stellte ein Student, der nach einem besonders erfolglosen Tag das Labor ausfegen sollte, folgende Überlegung an:

Wenn, so dachte er bei sich, so ein Apparat *im Grunde genommen* unmöglich ist, dann ist das logischerweise eine *endliche* Unwahrscheinlichkeit. Ich brauche also nichts anderes zu tun, als genau auszurechnen, wie unwahrscheinlich so ein Apparat ist, dann muss ich diese Zahl in den Endlichen Unwahrscheinlichkeitsgenerator eingeben, ihm eine Tasse wirklich heißen Tee servieren … und ihn anstellen!

Das tat er und fand zu seinem Erstaunen, dass es ihm einfach so aus der hohlen Hand gelungen war, den lange gesuchten Unendlichen Unwahrscheinlichkeitsgenerator zu erfinden.

Sein Erstaunen war freilich noch größer, als er, kurz nachdem er vom Galaktischen Institut mit dem Preis für Äußerste Gerissenheit ausgezeichnet worden war, von einer rasenden Horde berühmter Physiker gelyncht wurde, die schließlich dahinter gekommen waren, dass das einzige, was sie wirklich nicht ertragen konnten, ein Besserwisser war.

…

Sensationeller Durchbruch in der Unwahrscheinlichkeitsphysik. Wenn die Geschwindigkeit des Raumschiffs die Unendliche Unwahrscheinlichkeit erreicht, durchfliegt es nahezu gleichzeitig jeden Punkt des Universums.

Douglas Adams: *Per Anhalter durch die Galaxis. Alle 5 Romane in einem Band. München 2001 (10. Aufl.) <Heyne>. S 90 - 91 / S 97.*

Beispiel: Auf ein Quadrat mit Seitenlänge $2 \cdot r$ fallen zufällig verteilte Regentropfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen sie im Inneren des Inkreises?

[**Lösung:**

$$P = \frac{A_{\bigcirc}}{A_{\square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Das Zählen von Regentropfen liefert also - zumindest in der Theorie - eine Methode, π mit Hilfe eines Zufallsexperiments experimentell zu bestimmen. Man spricht hier auch von **Monte-Carlo-Methoden**.]

Vollständige Induktion

- In der Mathematik unterscheidet man hauptsächlich drei Arten von Beweisen:
  - **direkte Beweise**, die eine Behauptung auf direktem Weg z.B. durch Nachrechnen zeigen,
  - **indirekte Beweise**, die vom Gegenteil der Behauptung ausgehen und zeigen, dass dies auf einen Widerspruch bzw. in eine Sackgasse führt und
  - **Induktionsbeweise**.

  Letztere werden vor allem eingesetzt, um eine Behauptung für *alle* natürlichen Zahlen zu zeigen. Die Grundlagen dafür findet man in den **Peano-Axiomen** der natürlichen Zahlen (nach Guiseppe **Peano** [1858 - 1939]), die die grundlegenden Eigenschaften und Rechenregeln für $\mathbb{N}$ festlegen.

	Undefinierte Grundbegriffe
•	0 ... „Null“
•	' ... „Nachfolger“
1	$\neg\,(\,\exists x\,(\,0 = x'\,)\,)$
2	$\forall x\ \forall y\ (\,x' = y' \ \Leftrightarrow\ x = y\,)$
3	$(\,A(0) \wedge \forall x\,(\,A(x) \Rightarrow A(x')\,)\,) \ \Rightarrow\ \forall x\,(\,A(x)\,)$
4	$\forall x\,(\,x + 0 = x\,)$
5	$\forall x\ \forall y\ (\,x + y' = (x + y)'\,)$
6	$\forall x\,(\,x \cdot 0 = 0\,)$
7	$\forall x\ \forall y\ (\,x \cdot y' = (x \cdot y) + x\,)$

Axiom Nr. 3 ist das *Induktionsaxiom*: Gilt eine Aussage A für 0 (bzw. einen Startwert n_0) und folgt aus der Aussage A über eine Zahl stets die Aussage A für den Nachfolger dieser Zahl, dann gilt A für alle natürlichen Zahlen (ab n_0).

- Die Grundidee dieser Art von Beweisen - eine Aussage gilt für einen Startwert und es geht *immer so weiter* - war schon den Pythagoreern bekannt.

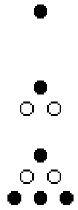
Aufgabe 6

Zeige: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$

- Diese Aufgabe geht auf Carl Friedrich Gauß [1777 - 1855] zurück. Gauß erzählte von sich selbst, er habe das Rechnen vor dem Reden gelernt. Berühmt ist jedenfalls die Anekdote aus dem 3. Jahr seiner Volksschulzeit: Der Lehrer J. G. Büttner stellte die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren - vielleicht hoffte er auf einige Minuten Ruhe. Bereits nach kurzer Zeit legte jedoch Gauß seine Schiefertafel mit der richtigen Lösung auf den Tisch des Lehrers. "Ligget se!" - Da liegt sie, verkündete er. Seine Idee war es, die Zahlen nicht der Reihe nach zu addieren, sondern immer die erste zur letzten: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ usw. Insgesamt gibt es 50 Zahlenpaare mit der Summe 101, die gesuchte Lösung ist also $50 \cdot 101 = 5050$. Wir wollen die entsprechende Formel allgemein (bis zu einer beliebigen Endzahl n) beweisen.

- Beweis mit Methoden der Antike: Wir betrachten *figurierte Zahlen*.

Dreieckszahlen



$D_1 = 1$

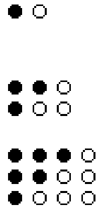
$D_2 = 1 + 2$

$D_3 = 1 + 2 + 3$

…

$D_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Rechteckszahlen



$R_1 = 2 \cdot D_1 = 1 \cdot 2$

$R_2 = 2 \cdot D_2 = 2 \cdot 3$

$R_3 = 2 \cdot D_3 = 3 \cdot 4$

…

$R_n = 2 \cdot D_n = n \cdot (n+1)$

$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n \cdot (n+1)$

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ □

```
               1
            1     1
         1     2     1
      1     3     3     1
   1     4     6     4     1
1     5    10    10     5     1
```

Hinweis: Dreieckszahlen finden sich auch als „Diagonale“ im *Pascal’schen Dreieck*.

- Beweis nach Carl Friedrich Gauß: Umordnung der Summanden

1	+	2	+	3	+	...	+	n-2	+	n-1	+	n
n	+	n-1	+	n-2	+	...	+	3	+	2	+	1
n+1	+	n+1	+	n+1	+	...	+	n+1	+	n+1	+	n+1

n Pärchen ergeben die doppelte Summe: $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n \cdot (n+1)$

$\Rightarrow \; 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$, wobei entweder n oder (n+1) gerade und daher durch 2 teilbar ist. □

- Induktionsbeweis

1. $n = 1$: $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

2. Es gelte A(n)

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{\text{Induktions-voraussetzung}} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \quad \ldots \text{A(n+1)}$$ □

Herausheben — gemeinsamer Nenner

Aufgaben

7. Zeige: $2+4+6+\ldots+2n = n\cdot(n+1)$

- **Induktionsbeweis**

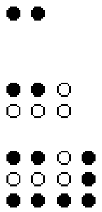
1. $n=1: \quad 2 = 1\cdot 2 \quad \checkmark$
2. $\underbrace{2+4+6+\ldots+2n}_{\text{Induktions-voraussetzung}} + 2\cdot(n+1) = n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1) \underset{\text{Herausheben}}{=} (n+1)\cdot(n+2) \quad \ldots \text{ A(n+1)}$ $\square$

- **direkter Beweis**

$$2+4+6+\ldots+2\cdot n \underset{\text{Herausheben}}{=} 2\cdot(1+2+3+\ldots+n) \underset{\text{bekannte Formel}}{=} 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = n\cdot(n+1) \qquad \square$$

- **figurierte Zahlen**

Rechteckszahlen



$R_1 = 1\cdot 2 = 2$

$R_2 = 2\cdot 3 = 2+4$

$R_3 = 3\cdot 4 = 2+4+6$

$\ldots$

$R_n = n\cdot(n+1) = 2+4+6+\ldots+2n$

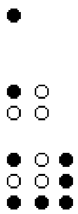
8. Zeige: $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

- **Induktionsbeweis**

1. $n=1: \quad 1 = 1^2 \quad \checkmark$
2. $\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{\text{Induktions-voraussetzung}} + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \ldots \text{ A(n+1)}$ $\square$

- **figurierte Zahlen**

Quadratzahlen



$Q_1 = 1^2 = 1$

$Q_2 = 2^2 = 1+3$

$Q_3 = 3^2 = 1+3+5$

$\ldots$

$Q_n = n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

9. Zeige: $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Induktionsbeweis**

1. $n=0:\ 2^0=2^1-1$ ✓
2. $\underbrace{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}_{\text{Induktionsvoraussetzung}}+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1\ \ldots$ A(n+1) $\square$

10. Die *Fibanacci-Folge* <1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …> ist gegeben durch die rekursive Vorschrift $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ und die Startwerte $f(1)=f(2)=1$. Zeige, dass für diese Folge das von Daniel **Bernoulli** [1700 - 1782] und Jacques **Binet** [1786 - 1856] gefundene Bildungsgesetz gilt:

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$n=1:\quad f(1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1 \quad ✓$$

$$n=2:\quad f(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{6+2\cdot\sqrt{5}-6+2\cdot\sqrt{5}}{4}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{4\cdot\sqrt{5}}=1 \quad ✓$$

Die Formel gelte bis n, d.h.

$$f(n-1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right),\quad f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$f(n-1)+f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1-2\cdot\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)=f(n+1) \quad \square$$

Wie findet man so ein Bildungsgesetz? Überlegen wir zuerst den Limes der Quotientenfolge:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad \Big|\ : f(n\text{-}1)$$

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = 1 + \frac{f(n-2)}{f(n-1)} \qquad \Big|\ \lim_{n\to\infty}$$

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(n-1)}$ existiert: sei $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n-1)}{f(n-2)} = x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n-2)}{f(n-1)} = \dfrac{1}{x}$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \qquad \Big|\ \cdot x$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \qquad \Big|\ \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}, \quad \left(x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \qquad \square$$

Die folgende Idee liefert einen brauchbaren Ansatz: $f(n) = u \cdot x_1^n + v \cdot x_2^n$

u und v lassen sich aus den Anfangsgliedern bestimmen:

$$\begin{array}{lcl} f(0) & = & u + v = 0 \\ f(1) & = & u \cdot x_1 + v \cdot x_2 = 1 \end{array}$$

$$v = -u \;\Rightarrow\; u \cdot x_1 - u \cdot x_2 = 1$$

$$u \cdot (x_1 - x_2) = u \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = u \cdot \sqrt{5} = 1, \quad \underline{u = \frac{1}{\sqrt{5}}}, \quad \underline{v = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\mathbf{f(n)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}} \cdot \left(\left(\frac{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}} \right)^{\mathbf{n}} - \left(\frac{\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}} \right)^{\mathbf{n}} \right) \qquad \square$$

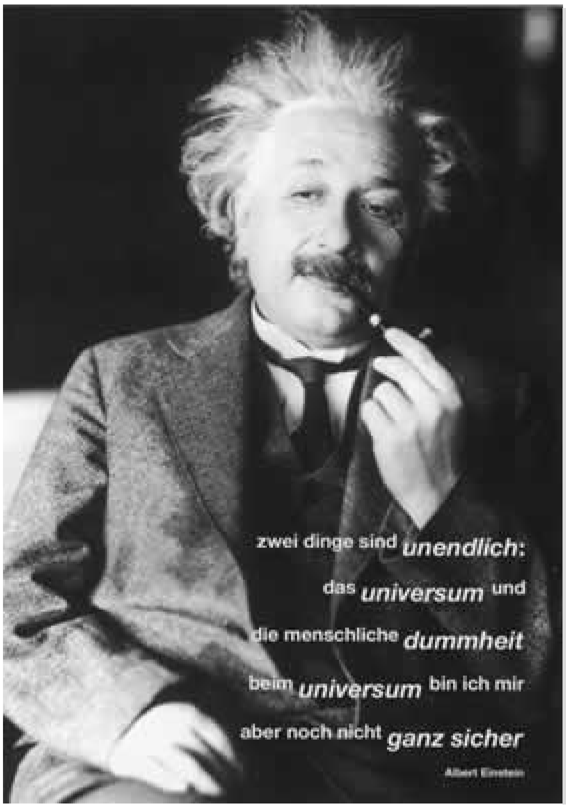
Personenregister

Literaturverzeichnis

- Amir D. **Aczel**: Die Natur der Unendlichkeit. Mathematik, Kabbala und das Geheimnis des Aleph. Reinbeck bei Hamburg 2002 <Rowohlt>.
- Douglas **Adams**: Per Anhalter durch die Galaxis. Alle 5 Romane in einem Band. München 2001 (10. Aufl.) <Heyne>.
- Die **Anfänge** der abendländischen Philosophie. Fragmente und Lehrberichte der Vorsokratiker. Eingeleitet von Ernst **Howald**; übertragen von Michael **Grünwald**. O.A. <Lizenzausgabe für Buchgemeinschaften>.
- Luciano **De Creszenzo**: Geschichte der griechischen Philosophie. Die Vorsokratiker. Zürich 1990 <Diogenes>.
- Christoph **Drösser**: Wie groß ist unendlich? Knobelgeschichten und Denkspiele aus dem Zahlenuniversum. Reinbeck bei Hamburg 2005 <Rowohlt>.
- Siegfried **Gottwald**, Hans-Joachim **Ilgauds**, Karl-Heinz **Schlote** (Hrsg.): Lexikon bedeutender Mathematiker. Leipzig 1990 <Bibliographisches Institut Leipzig>.
- Wilhelm **Kuehs**: Die Thrud. Wolfsberg 1993 <Edition Wolfsberg im Tandaradei Verlag>
- **Merkwürdiges von unendlichen Mengen.** In: Stefan **Götz**, Hans-Christian **Reichel** (Hrsg.); Robert **Müller**, Günter **Hanisch**: Mathematik-Lehrbuch 5. Wien 2006 <öbv & hpt>. S 30-31. **Gerade(n)wegs ins Unendliche.** Ebd. S 172-173.
- **Vom Zählen zum Messen.** In: Stefan **Götz**, Hans-Christian **Reichel** (Hrsg.); Robert **Müller**, Günter **Hanisch**, Mathematik-Lehrbuch 6. Wien 2006 <öbv & hpt>. S 162-163.
- François **Lelord**: Hector und die Entdeckung der Zeit. München 2006 <Piper>.
- Robert **Musil**: Die Verwirrungen des Zöglings Törleß. Reinbeck bei Hamburg 1981 (424.-448. Tsd.) <Rowohlt>.
- Heinz **Partoll**: Irmgard **Wagner**: Mathe macchiato Analysis. Cartoon-Mathematikkurs für Schüler und Studenten. München, Boston u.a. 2005 <Pearson>.
- Rudolf **Taschner**: Das Unendliche. Mathematiker ringen um einen Begriff. Berlin, Heidelberg, New York u.a. 1995 <Springer>.
- Rudolf **Taschner**: Musil, Gödel, Wittgenstein und das Unendliche. Wien 2002 <Picus>.
- Das **Unendliche**. Spektrum der Wissenschaft Spezial 1/2001.
- N. J. **Wilenkin**: Unterhaltsame Mengenlehre. Leipzig 1973 <BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft>.
- Friedrich **Wille**: Humor in der Mathematik. Eine unnötige Untersuchung lehrreichen Unfugs, mit scharfsinnigen Bemerkungen, durchlaufender Seitennummerierung und freundlichen Grüßen. Göttingen 1992 (4. Aufl.) <Vandenhoeck & Ruprecht>.

Link-Tipps

- wikipedia: Unendlichkeit url: http://de.wikipedia.org/wiki/Unendlichkeit
- Kompaktes Wörterbuch des Unendlichen: unendliches.net url: http://www.unendliches.net/
- MathMuseum der Uni Greifswald: Fraktale url: http://www.math-inf.uni-greifswald.de/MathMuseum/Fraktale/
- Neil J. A. Sloane: Online-Enzyklopädie der Zahlenfolgen url: http://www.research.att.com/~njas/sequences/
- mathe-online: Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung url: http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablgrenz
- Matroids Matheplanet: vollständige Induktion url: http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/vi/vi.html
- Mathe-Zaubergarten: Mäuschen-Lauf url: http://home.fonline.de/fo0126/spiele/mauslauf/denk17.htm



Bildquelle: http://www.funshop.ch/catalog/images/artikel/38599.jpg (10.03.2007)

Albert Einstein [1879 - 1955]