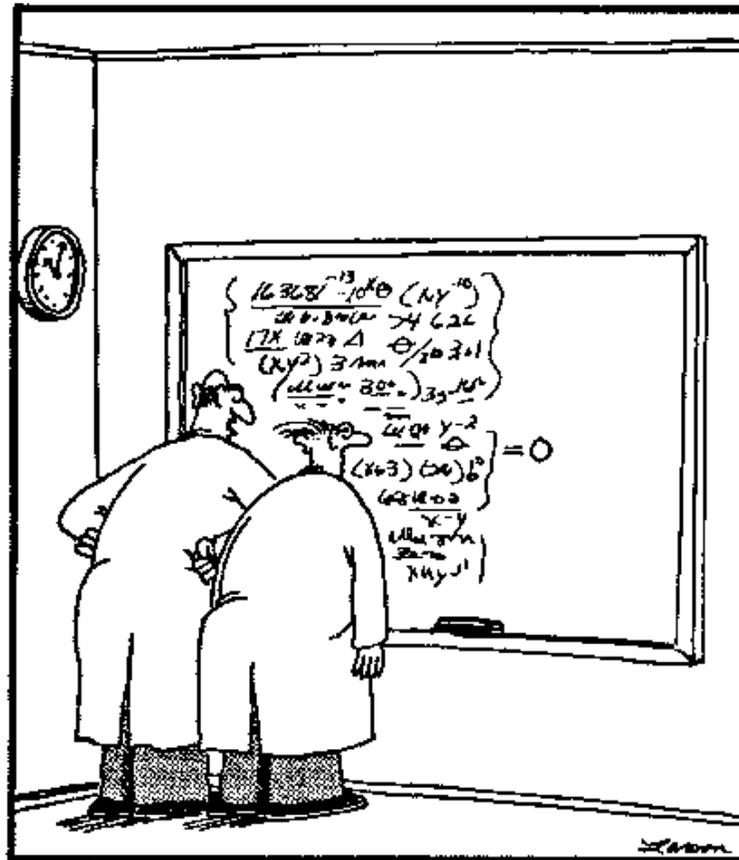


Wie viel Mathematik steckt in Forschung und Technik?



"No doubt about it, Ellington - we've mathematically expressed the purpose of the universe. God, how I love the thrill of scientific discovery!"



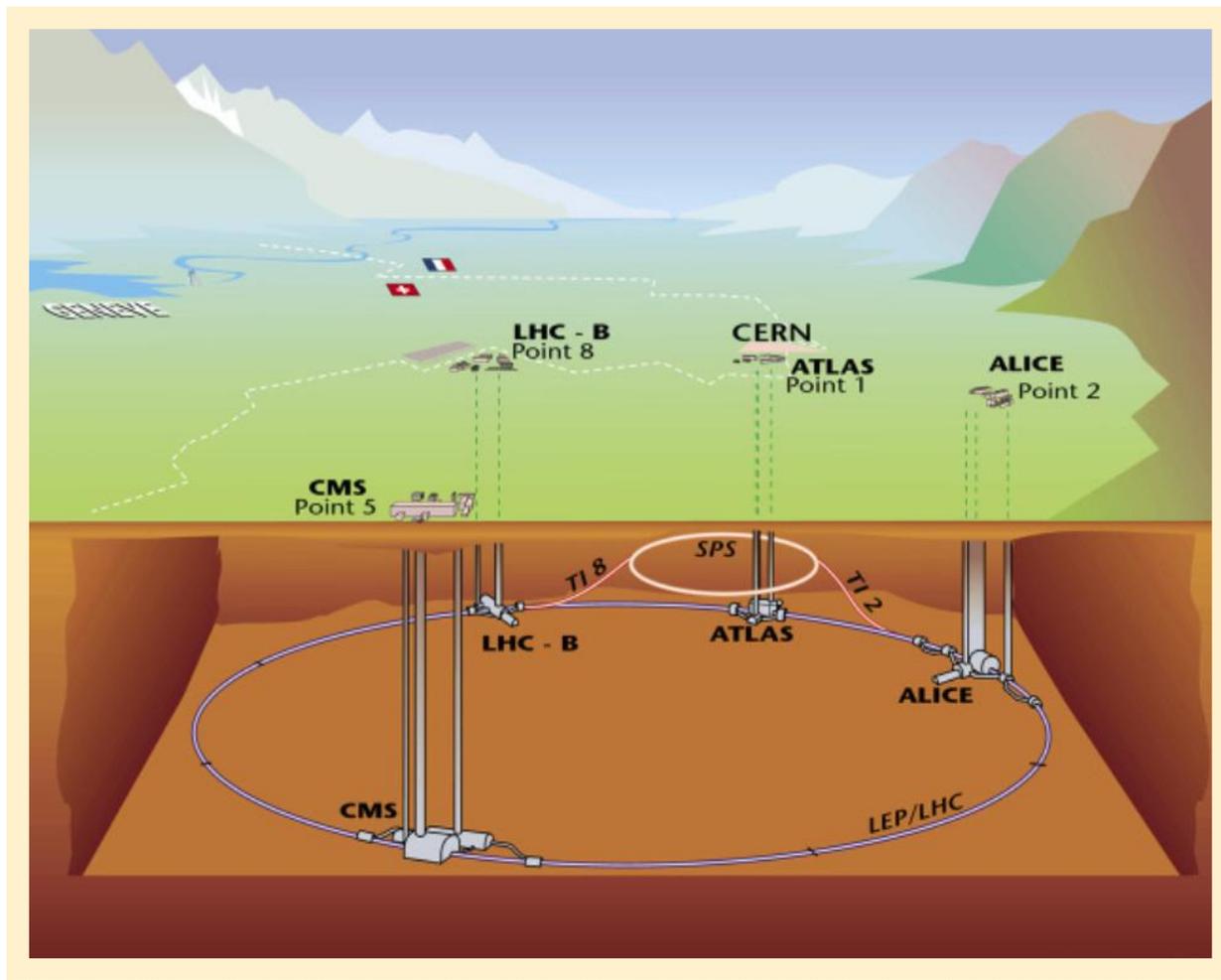
Mathematik an der HTL

- ein kleiner Überblick:

- **Elektronik und Elektrotechnik:**
 - Qualitätssicherung und Abschätzung von Ergebnissen
 - Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Beispiel 1)
 - Naturwissenschaftliche Anwendungen, Wechselströme, Signale
 - Komplexe Zahlen
 - Differentialgleichungen (Beispiel 3)
 - Reihenentwicklungen und Integraltransformationen (Beispiel 2)

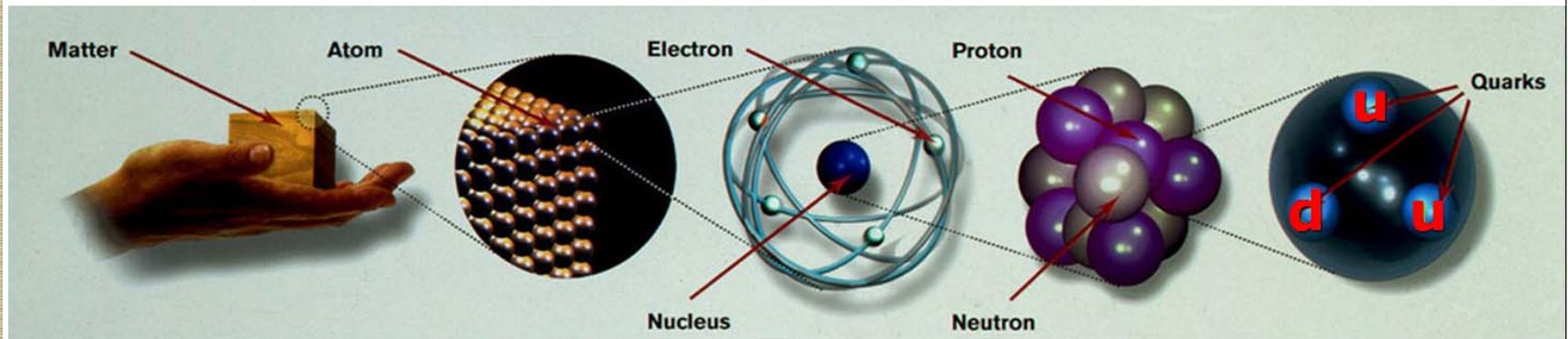
Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Was ist der LHC?



Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

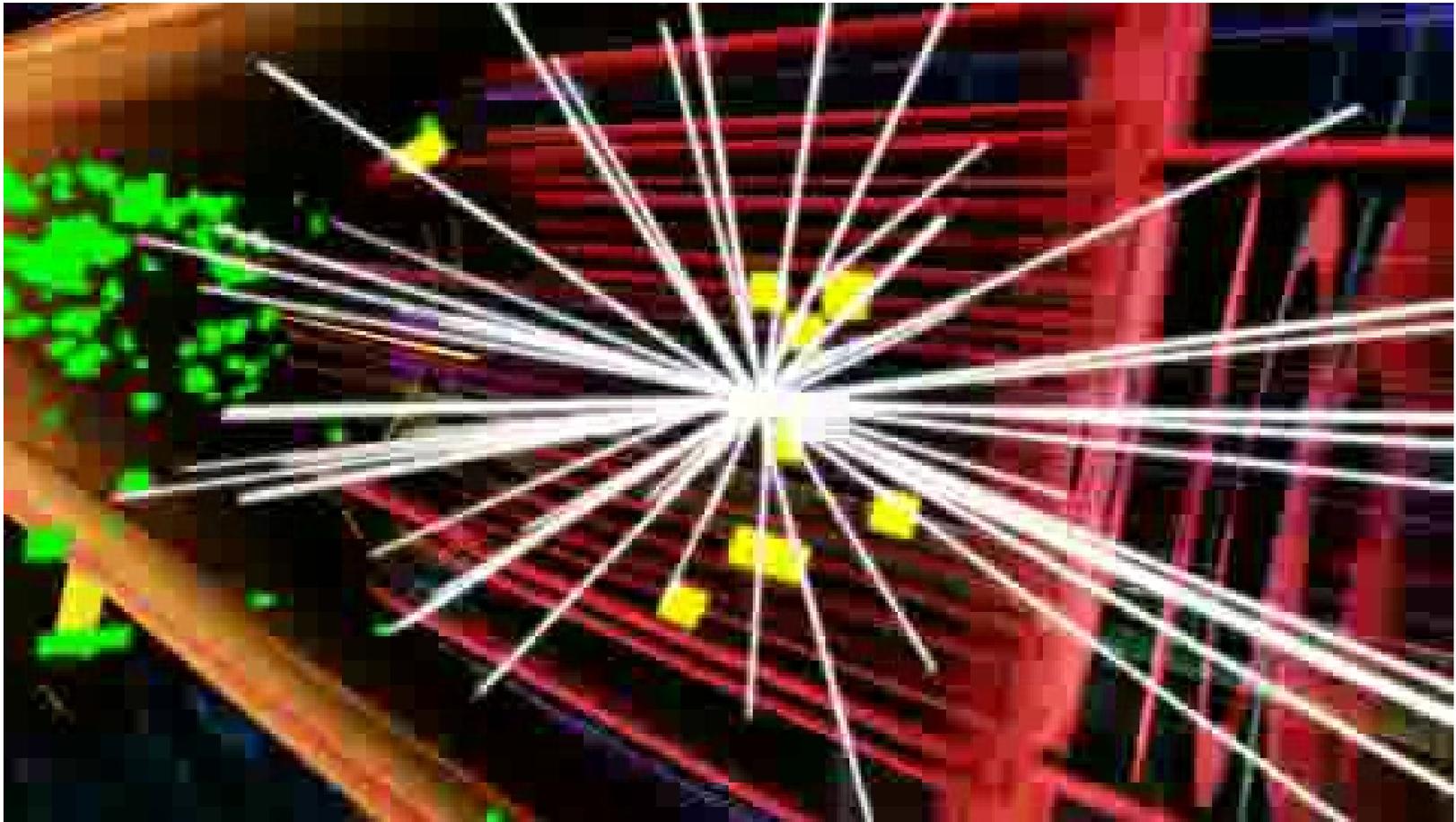
Wie klein ist ein Proton?



Größenordnung: 10^{-15} m

Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Was kann man dort beobachten?



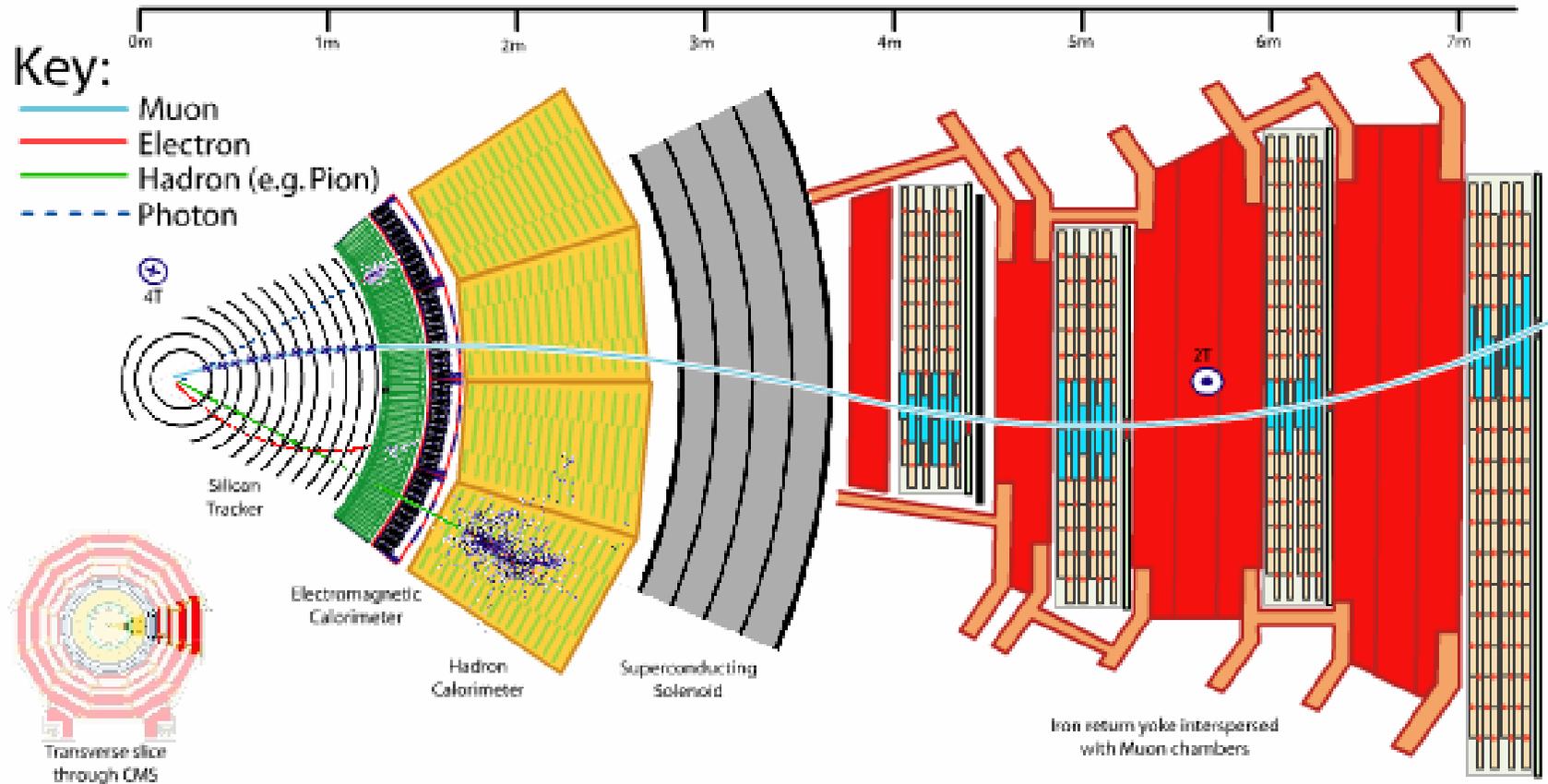


Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Eine kurze Beschreibung:

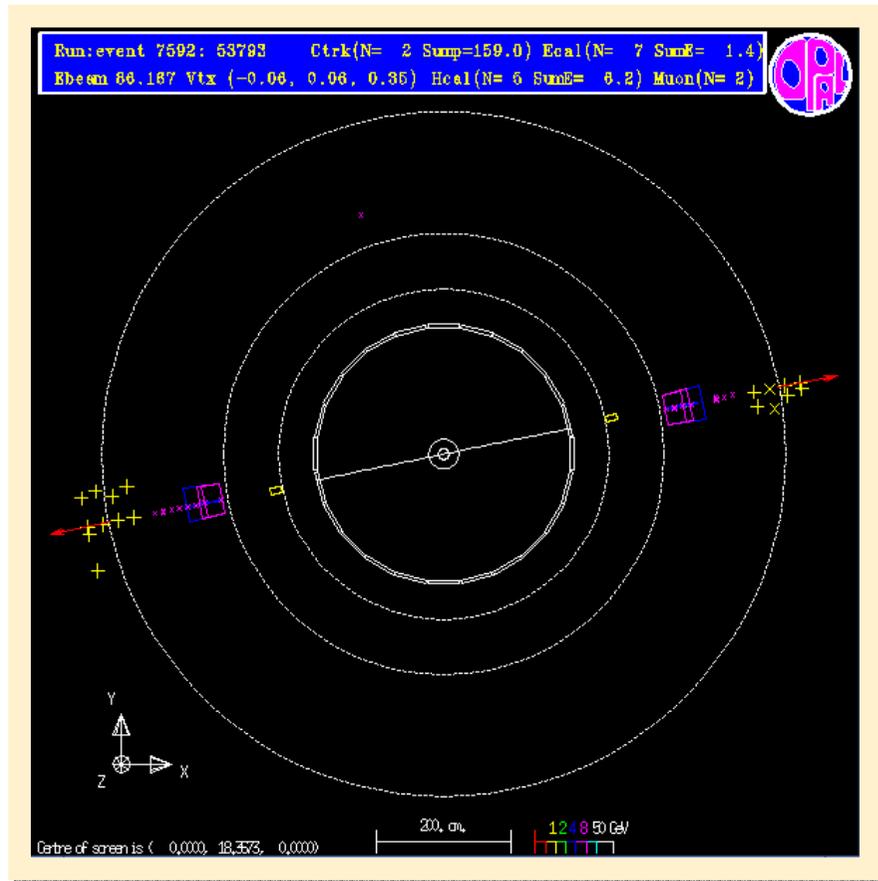
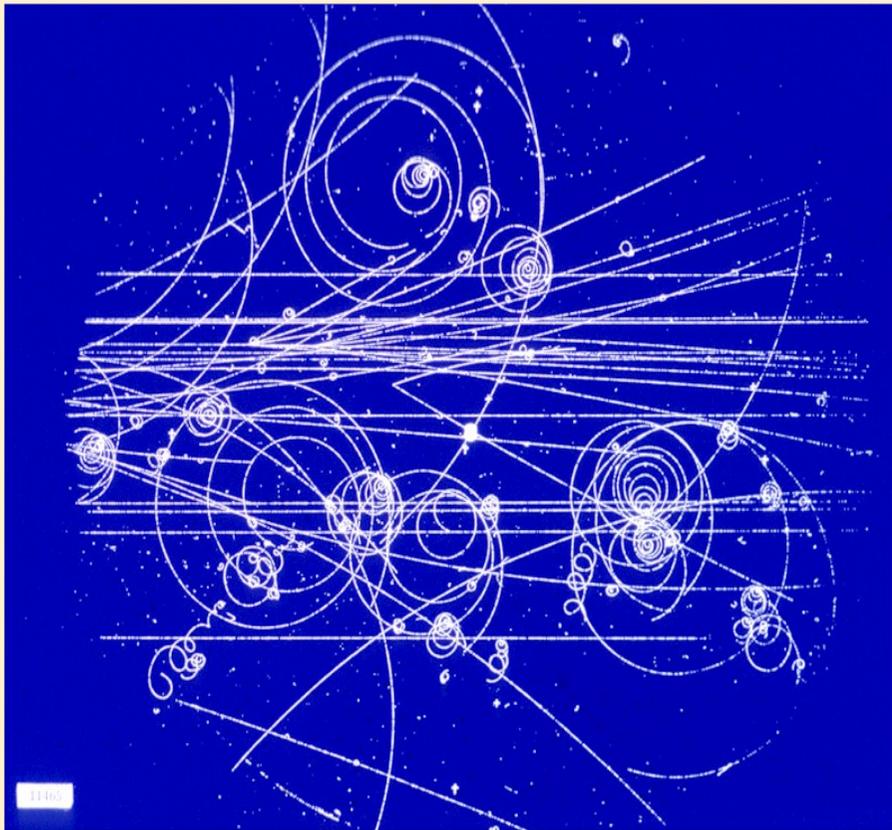
- Zwei Protonenstrahlen kreisen mit fast Lichtgeschwindigkeit in gegenläufiger Richtung.
- Diese werden zur Kollision gebracht.
- Dabei entstehen Teilchen, die oft sofort wieder in weitere Teilchen zerfallen.
- Diese Teilchen „sieht“ man nicht direkt, aber sie hinterlassen **Spuren** in den einzelnen Bereichen des Detektors.
- Die gigantischen Computeranlagen am CERN zeichnen diese **Teilchenspuren** auf, welche hinterher ausgewertet werden.

Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC



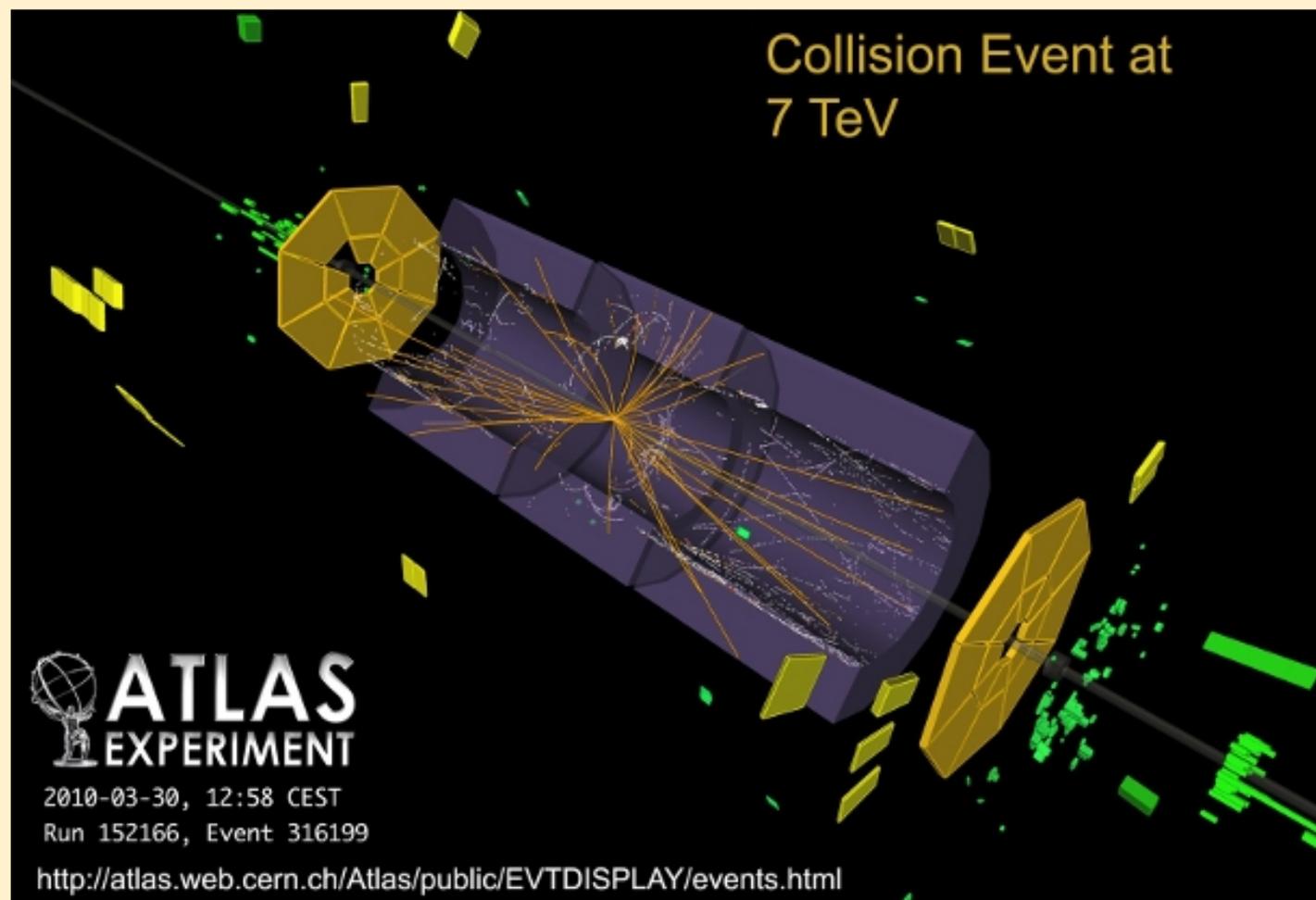
Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Teilchenspuren im Laufe der Zeit:



Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Moderne Teilchenspuren:





Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Aufgabe:

Wir schlüpfen in die Rolle eines
Teilchenphysikers!

Können wir **genau vorhersagen**, was wir
bei einer Kollision an Teilchen bekommen
werden?

NEIN \longrightarrow **Ausgänge sind zufällig!**

Erfahrungswerte \longrightarrow Schätzung möglich?



Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Auf welche Erfahrungswerte können wir zurückgreifen?

- Ergebnisse am LEP, dem Vorgänger des LHC
- **viele Spurbilder** von Zerfallsprozessen
- versuchen **Häufigkeiten** zu entdecken
- ermitteln daraus eine Möglichkeit **möglichst gute Vorhersagen** zu treffen

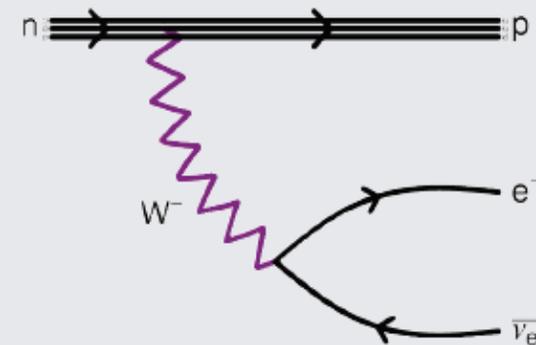
Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Etwas Theorie - Was ist ein Boson?

Die schwache Wechselwirkung

Bereits 1920 wurde vom Österreicher **Wolfgang Pauli** (Nobelpreis 1945) spekuliert, dass es noch "schwach" wechselwirkende Teilchen geben müsse, da der Zerfall freier Neutronen anders nicht erklärt werden konnte.

β -Zerfall des Neutrons



W. Pauli



F. Reines



Für die Entdeckung der Neutrinos 1956 erhielt **F. Reines** 1995 den Nobelpreis.

Die Theorie die diesen Zerfall beschreibt sagt die Existenz von sogenannten W - und Z -Bosonen voraus (Nachweis 1983 am CERN).



Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

Einige Werte:

- **1 Milliarde Ereignisse** finden **pro Sekunde** an den Detektoren statt. Nach einem geeigneten Filterverfahren werden nur die interessantesten Ereignisse an die Datenbank weitergegeben.
- Prinzipiell kann man am LHC mit **200 W-Bosonen** und **50 Z-Bosonen pro Sekunde** rechnen.



Beispiel I - Zerfallsereignisse am LHC

- Fragen:
 - Wie groß ist die Chance bei **einem** Ereignis einen Zerfall in Elektronen zu beobachten?
 - Wie groß ist diese Chance bei **zwei** Ereignissen?
 - Wie groß ist die Chance bei **drei** Ereignissen keinen Zerfall in Elektronen beobachten zu können?
 - Man beobachtet 5 Sekunden lang. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nur ein Myon-Ereignis zu erhalten?



Beispiel 2: Atommüll – Container

Greenpeace protestierte gegen die Versenkung der Atommüll – Container im Meer und behauptete, dass die max. zulässige Aufprallgeschwindigkeit von 12 m/s in 100 m Tiefe überschritten werde.

Beispiel 2: Atommüll – Container

Modellierung

- Container : Masse $m = 240 \text{ kg}$,
Volumen $V = 0.21 \text{ m}^3$
Wasserwiderstand: $1,17 \cdot v(t)$
- Erdbeschleunigung: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Wasserdichte (Salzwasser): $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$

Beispiel 2: Atommüll – Container

- Wir betrachten die resultierende Kraft F , die auf den Container wirkt.

$$F(t) = m \cdot a(t) \quad \text{mit} \quad a(t) = v'(t)$$

- Die resultierende Kraft setzt sich zusammen aus:
 - dem Auftrieb: $- V \cdot \rho \cdot g$
 - der Schwerkraft: $m \cdot g$
 - dem Wasserwiderstand: $- 1.17 \cdot v(t)$
- Wir erhalten also die Differentialgleichung :

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - V \cdot \rho \cdot g - 1.17 \cdot v(t)$$

- 
- Einsetzen der jeweiligen Werte für m , V , g und ρ liefert:

$$v'(t) = 1.0116 - 0.0049 \cdot v(t) \quad \text{mit } v(0) = 0$$

Exakte Lösung:

$$v(t) = 207.519 \cdot (1 - e^{-0.004875 \cdot t})$$

- Für den Ort x des Containers gilt:

$$x'(t) = v(t) \quad \text{mit } x(0) = 0$$

Exakte Lösung:

$$x(t) = 42568.049 \cdot (e^{-0.004875 \cdot t} - 1) + 207.519 \cdot t = 100$$

$$\Rightarrow t = 14.222$$

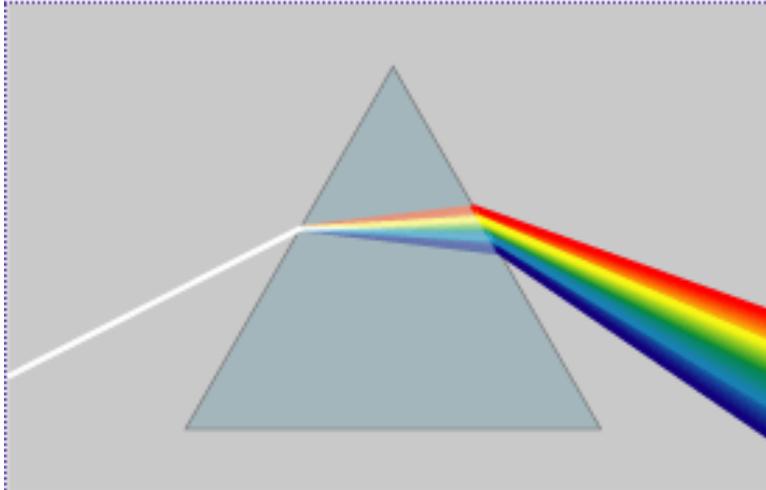
$$\Rightarrow v(14.222) = 13.901 \text{ m/s}$$

Beispiel 3: Prisma, Musik, Sicherheitssysteme

- Elektromagnetische Wellen (Licht)
- Schallwellen (Musik)
- Trigonometrische Funktionen
- Elektronik und Schwingung (Rechteckssignal)
- Der Ton macht die Musik
- Sicherheitssysteme (Sprecherverifikation)



Elektromagnetische Wellen



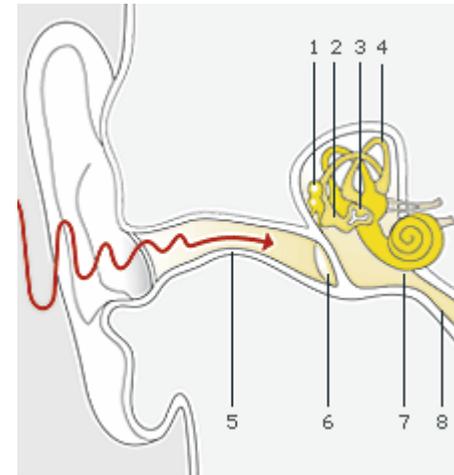
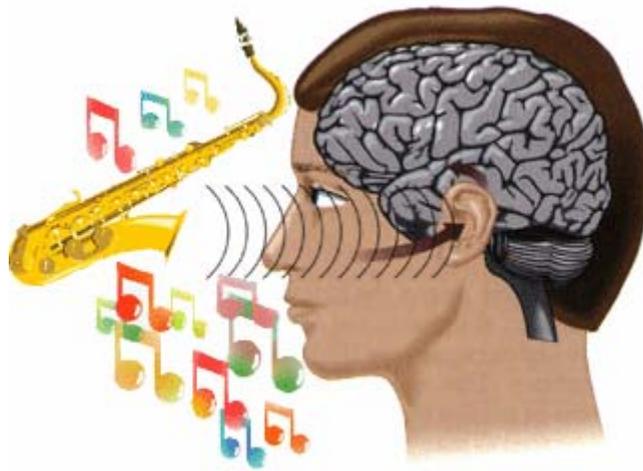
Elektromagnetische Strahlung jenseits der menschlichen Grenze der Sichtbarkeit mit niedrigerer Wellenlänge als violett wird bis zu einer bestimmten Frequenz als **Ultraviolett- oder UV-Strahlung** bezeichnet, solche mit größerer Wellenlänge als rot bis zu einer bestimmten Wellenlänge als **Infrarotstrahlung**.

Der Mensch vermag Licht mit Wellenlängen zwischen 350 Nanometern (violett) und 750 Nanometern (rot) wahrzunehmen.

Die Spektralfarben des Lichtes

| Farbe | Wellenlänge | Frequenz |
|---------|--------------|---------------|
| rot | ~ 700–630 nm | ~ 430–480 THz |
| orange | ~ 630–590 nm | ~ 480–510 THz |
| gelb | ~ 590–560 nm | ~ 510–540 THz |
| grün | ~ 560–490 nm | ~ 540–610 THz |
| blau | ~ 490–450 nm | ~ 610–670 THz |
| violett | ~ 450–400 nm | ~ 670–750 THz |

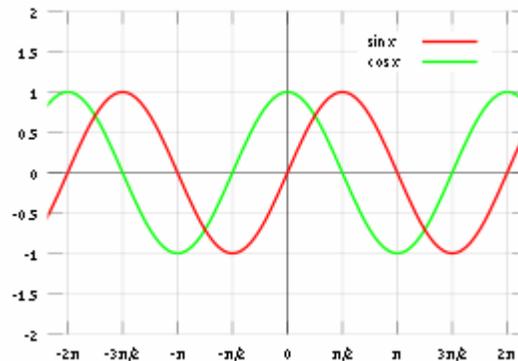
Schallwellen



Das Sinnesorgan Ohr zerlegt den eintreffenden Schall in seine Sinuskomponenten und führt damit eine Fourieranalyse durch: je nachdem, wie viel einer solchen Komponente in dem Gesamtsignal – dem eintreffenden Schall – vorhanden ist, wird ein Ton entsprechender Lautstärke und Frequenz wahrgenommen.

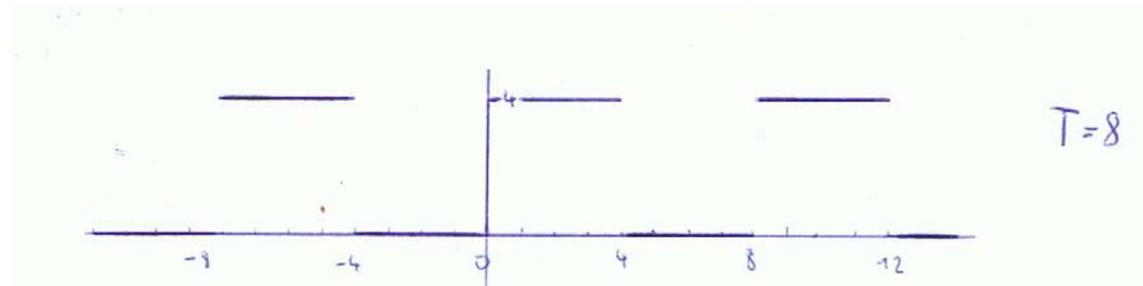
Trigonometrische Funktionen

- Welche Funktionen beschreibt eine periodische „Welle“?
- Sinus und Cosinus



Anwendung in der Elektronik

- Möglichkeit einen Rechtecksimpuls mit Hilfe von der Summe aus Sinusschwingungen darzustellen



- Sinusschwingung

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Amplitude A

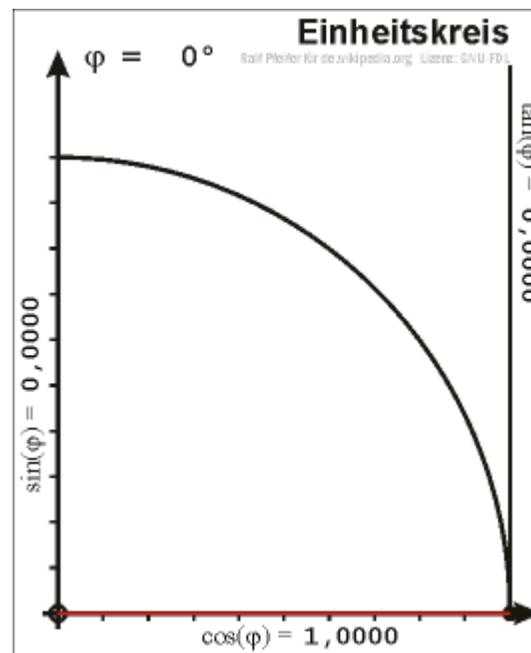
Frequenz ω

Nullphasenwinkel φ_0

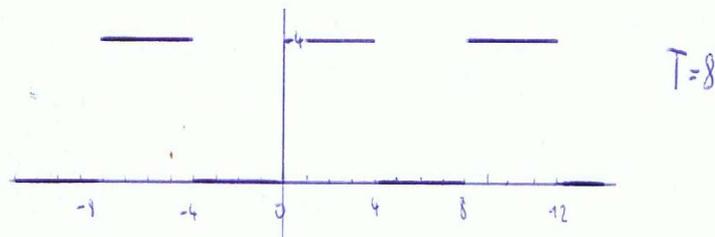
[I_sinusschwingung-allg.ggb](#)

Sinusschwingung

- Sinusschwingung und doch auch Cosinus vorhanden
- $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$
mit $A = \text{Wurzel}(a^2 + b^2)$, $\tan \varphi_0 = a/b$



Rechteckssignal



Fourierreihe

$f(t)$ ist T -periodisch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

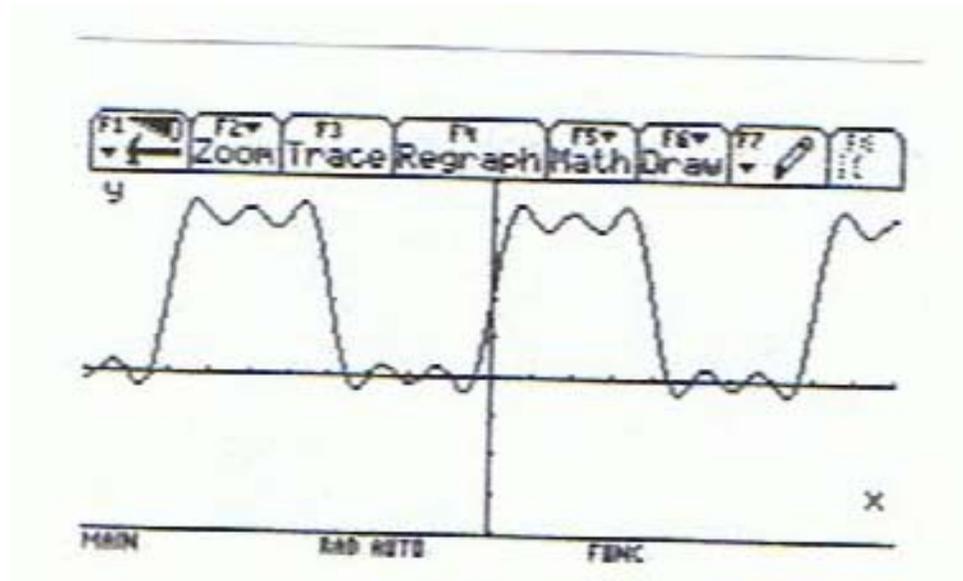
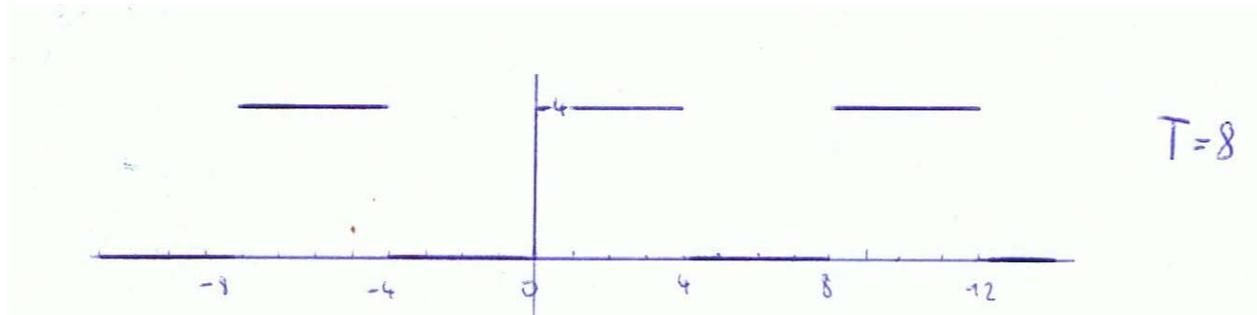
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n \omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n \omega_0 t) dt$$

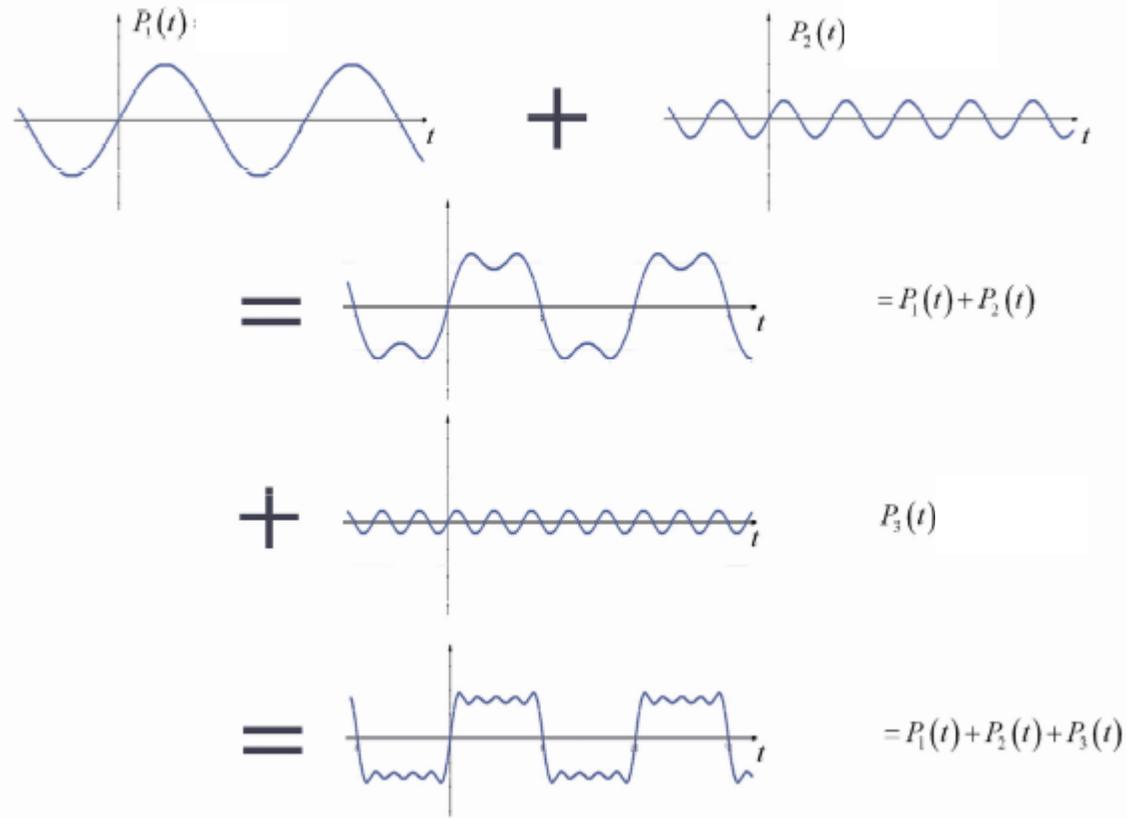
$$\begin{array}{ll} a_0 = 4 & b_1 = \frac{8}{\pi} \\ a_1 = 0 & b_2 = 0 \\ a_2 = 0 & b_3 = \frac{8}{3\pi} \\ a_3 = 0 & b_4 = 0 \\ a_4 = 0 & b_5 = \frac{8}{5\pi} \\ a_5 = 0 & \end{array}$$

$$\underline{\underline{f(t) = 2 + \frac{8}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{4} \cdot t\right) + \dots \right)}}$$

Ergebnis Rechteckssignal



Zusammensetzung der Sinusschwingungen





Zusammensetzung der Sinusschwingungen

- <http://www.elektroniktutor.de/flash/fourier.swf>

Von Schwingungen und Tönen

| Ton-name | Frequenzverhältnis zu c' | reine Stimmung |
|----------|--------------------------|----------------|
| c' | 1/1 | 264 Hz |
| cis' | 25/24 | 275 Hz |
| d' | 9/8 | 297 Hz |
| es' | 6/5 | 317 Hz |
| e' | 5/4 | 330 Hz |
| f | 4/3 | 352 Hz |
| fis' | 25/18 | 367 Hz |
| g' | 3/2 | 396 Hz |
| as' | 8/5 | 422 Hz |
| a' | 5/3 | 440 Hz |
| b' | 9/5 | 475 Hz |
| h' | 15/8 | 495 Hz |
| c'' | 2/1 | 528 Hz |

Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodendauer;

$$f = 1/T$$

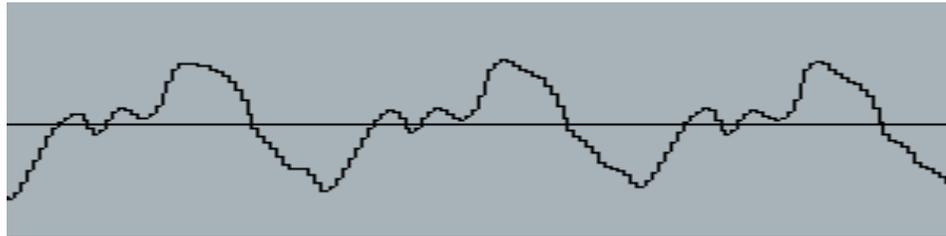
1. $f = \frac{1}{0,01 \text{ s}} = 100 \text{ Hz}$

2. Kammerton a = 440 HZ

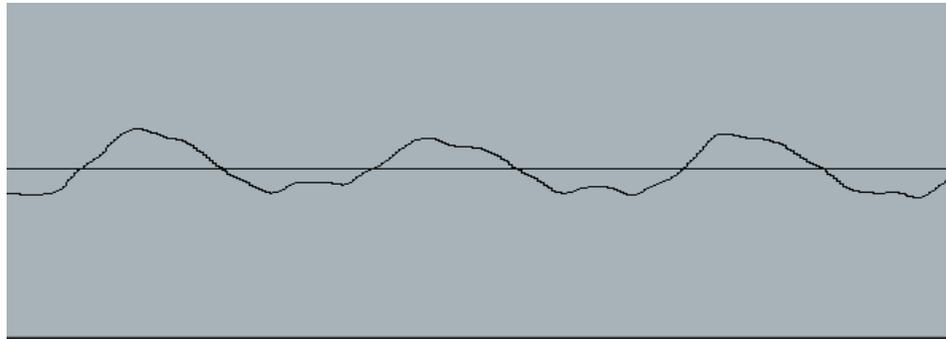
Eine Periode dauert 1/f Sekunden
also: 0,0022727 s
(Dauer einer Schwingung)

Der gleiche Ton? Macht die Musik!

- Violine (Sägezahn)



- Klavier





Spracherkennung

- Was ist Spracherkennung?
Und muss es differenzierter gesehen werden?
- 1. Spracherkennung
Was wurde gesagt?
- 2. Keyword-Spotting
Wurden bestimmte Schlüsselwörter gesagt?
(Osama Bin Laden)
- 3. Sprechererkennung
Wer hat gesprochen?
- **4. Sprecherverifikation**
War es tatsächlich die Person X?
- 5. Sprachenidentifikation
In welcher Sprache wurde gesprochen?



Sprecherverifikation

- Fehlerarten: Sprecherverifikation
- 2 Arten von Fehlern
 - 1. Berechtigte Benutzer werden abgelehnt
 - 2. Unberechtigte „Eindringlinge“ werden angenommen