

Wie verhalte ich mich bei einem Verhör und einer Mutprobe richtig?

Ringvorlesung Technische Mathematik

Philipp Hungerländer

10. November 2009

Inhaltsverzeichnis

- 1 Das Gefangenendilemma
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 Feiglingsspiel
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Inhaltsverzeichnis

- 1 Das Gefangenendilemma
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 Feiglingsspiel
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - **Situationsbeschreibung**
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Die Ausgangslage

- Zwei Gefangene
- Einer gemeinsamen Straftat verdächtigt
- Maximale Strafe für das Verbrechen ist 5 Jahre
- Schweigen beide, reichen Indizienbeweise dafür aus, Sie für 2 Jahre einzusperren
- Gesteht jedoch einer die Tat, werden beide für 4 Jahre eingesperrt

Auszahlungsmatrix der Ausgangslage

	B schweigt			B gesteht		
A schweigt	-4	A:-2	B:-2	-8	A:-4	B:-4
A gesteht	-8	A:-4	B:-4	-8	A:-4	B:-4

- Interdependenz des Verhaltens
- Was ist die kollektiv beste Strategiekombination?
- Welche Strategiewahl ist individuell vorteilhaft?

Auszahlungsmatrix der Ausgangslage - Analyse

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	-4	A:-2	B:-2	-8	A:-4	B:-4
A: Gestehen	-8	A:-4	B:-4	-8	A:-4	B:-4

- Kollektiv beste Strategiekombination
 - Schweigen/Schweigen
- Individuell beste Strategie
 - Schweigen
- Gibt es weitere Möglichkeiten zur Bestimmung interessanter Strategiekombinationen?

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - Situationsbeschreibung
 - **Das Nash-Gleichgewicht**
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Was ist ein Nash-Gleichgewicht?

- Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Kombination von Strategien der Spieler, bei der kein einzelner Spieler einen Anreiz besitzt von seiner Strategie abzuweichen.
- Anders formuliert: Von einem Nashgleichgewicht ausgehend kann kein Spieler durch einseitiges Abweichen von seiner Strategie seine Auszahlung verbessern

Einführung drei wichtiger Begriffe

- s_1^j ... Strategie j des Spielers 1
- $u_1(s_1^j, s_2^l)$... Auszahlung des Spielers 1, wenn er Strategie j wählt und Spieler 2 Strategie l wählt
- Σ_1 ... Menge aller möglichen Strategien von Spieler 1

Formale Definition einer besten Antwortstrategie

Eine Strategie \hat{s}_1 heißt beste Antwort des Spielers 1 auf eine Strategie s_2^i des Spielers 2, wenn sie Spieler 1 von allen ihm zur Verfügung stehenden Strategien die höchst mögliche Auszahlung u_1 bringt:

$$u_1(\hat{s}_1, s_2^i) \geq u_1(s_1^j, s_2^i) \quad \forall j \in \Sigma_1$$

Formale Definition des Nash-Gleichgewichts

Wenn sowohl s_1^* beste Antwort auf s_2^* als auch s_2^* beste Antwort auf s_1^* ist, dann heißt die Strategienkombination (s_1^*, s_2^*) ein Nash-Gleichgewicht des Spiels und es gilt:

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1^j, s_2^*) \quad \forall j \in \Sigma_1$$
$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2^j) \quad \forall j \in \Sigma_2$$

Gibt es in unserem Spiel Nash-Gleichgewichte?

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	-4	A:-2	B:-2	-8	A:-4	B:-4
A: Gestehen	-8	A:-4	B:-4	-8	A:-4	B:-4

Gibt es in unserem Spiel Nash-Gleichgewichte?

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	-4	A:-2	B:-2	-8	A:-4	B:-4
A: Gestehen	-8	A:-4	B:-4	-8	A:-4	B:-4

- Ja, es gibt 2 Nash-Gleichgewichte
 - Schweigen/Schweigen
 - Gestehen/Gestehen

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - **Situationsverschärfung**
 - Mathematische Fragen

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Der Handel

- Ein Handel wird vorgeschlagen, um die dominante Strategie des Schweigens zu brechen
- Gesteht einer, aber der andere nicht, kommt der Geständige frei, der Schweigende muss dagegen die maximale Strafe von 5 Jahren absitzen
- Die übrigen Bestrafungen bleiben dieselben wie zuvor
- Nun werden die beiden unabhängig voneinander befragt. Es gibt keine Möglichkeit zur Kooperation

Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix nach dem Handel

	B: Schweigen		B: Gestehen	
A: Schweigen	A:	B:	A:	B:
A: Gestehen	A:	B:	A:	B:

Ordnen Sie folgende Auszahlungen entsprechend in die Matrix ein: 0, 0, -2, -2, -4, -4, -5, -5

Auszahlungsmatrix nach dem Handel

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	-4	A:-2	B:-2	-5	A:-5	B:0
A: Gestehen	-5	A:0	B:-5	-8	A:-4	B:-4

- Was ist die kollektiv beste Strategiekombination?
- Welche Strategiewahl ist individuell vorteilhaft?
- Welche Nash-Gleichgewichte gibt es in diesem Spiel?

Auszahlungsmatrix nach dem Handel - Analyse

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	-4	A:-2	B:-2	-5	A:-5	B:0
A: Gestehen	-5	A:0	B:-5	-8	A:-4	B:-4

- Beste kollektive Strategiekombination
 - Schweigen/Schweigen
- Individuell beste Strategie
 - Gestehen
- Nash-Gleichgewicht
 - Gestehen/Gestehen
- Kollektive und individuelle Analyse führen zu verschiedenen Handlungsempfehlungen - Dilemma

Beispiele aus Politik und Wirtschaft

- Kalter Krieg zwischen USA und UDSSR
 - Strategien:
- Kampf um Marktanteil zwischen 2 Unternehmen
 - Strategien:

Beispiele aus Politik und Wirtschaft

- Kalter Krieg zwischen USA und UDSSR
 - Strategien: *Aufrüsten* und *nicht aufrüsten*
 - Welchen Strategien im Gefangenendilemma entsprechen die Strategien *Aufrüsten* und *nicht aufrüsten*?
- Kampf um Marktanteil zwischen 2 Unternehmen
 - Strategien: *Werbung* und *keine Werbung*
 - Welchen Strategien im Gefangenendilemma entsprechen die Strategien *Werbung* und *keine Werbung*?

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - **Mathematische Fragen**

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Setzen Sie die angeführten Buchstaben in die Auszahlungsmatrix ein

	B: Schweigen		B: Gestehen	
A: Schweigen	A:	B:	A:	B:
A: Gestehen	A:	B:	A:	B:

- T (*Temptation*): Belohnung für einseitigen Verrat
- R (*Reward*): Belohnung für gemeinsames Schweigen
- P (*Punishment*): Bestrafung für gegenseitiges Gestehen
- S (*Sucker's payoff*): Bestrafung für einseitiges Schweigen

Die verallgemeinerte Auszahlungsmatrix

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	$2 \cdot R$	A: R	B: R	$S + T$	A: S	B: T
A: Gestehen	$T + S$	A: T	B: S	$2 \cdot P$	A: P	B: P

- T (*Temptation*): Belohnung für einseitigen Verrat
- R (*Reward*): Belohnung für gemeinsames Schweigen
- P (*Punishment*): Bestrafung für gegenseitiges Gestehen
- S (*Sucker's payoff*): Bestrafung für einseitiges Schweigen
- Welche Größenrelationen müssen zwischen T , R , P und S gelten, um eine Dilemmasituation zu erzeugen?

Die verallgemeinerte Auszahlungsmatrix - Dilemmasituation

	B: Schweigen			B: Gestehen		
A: Schweigen	$2 \cdot R$	A: R B: R		$S + T$	A: S B: T	
A: Gestehen	$T + S$	A: T B: S		$2 \cdot P$	A: P B: P	

- T (*Temptation*): Belohnung für einseitigen Verrat
- R (*Reward*): Belohnung für gemeinsames Schweigen
- P (*Punishment*): Bestrafung für gegenseitiges Gestehen
- S (*Sucker's payoff*): Bestrafung für einseitiges Schweigen
- $T > R > P > S$

Was wollen Mathematiker über Nash-Gleichgewichte wissen?

- Existenz? Wenn ja, unter welchen Voraussetzungen?
- Eindeutigkeit? Wenn ja, unter welchen Voraussetzungen?

Was wollen Mathematiker über Nash-Gleichgewichte wissen?

- Existenz
 - Die Auszahlungsfunktionen $u_i(s_1, \dots, s_n)$ sind stetig und quasikonkav in s_i .
 - Die Strategiemengen $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ sind konvex und kompakt.
- Eindeutigkeit
 - Noch kompliziertere Voraussetzungen ...

Das Gefangenendilemma als ein spezielles Spiel

- Ein berühmtes Beispiel in der Spieltheorie
- Ein Zwei-Personen-Nicht-Nullsummen-Spiel
- Die Beschreibung eines sozialen Dilemmas
- Individuell rationale Entscheidungen können zu einem kollektiv schlechten Ergebnis führen

Verallgemeinerungsmöglichkeiten



Verallgemeinerungsmöglichkeiten

- Mehr als zwei Spieler betrachten
- Mehr als zwei Strategien pro Spieler
- Unterschiedliche Strategien der Spieler - Asymmetrie

Inhaltsverzeichnis

- 1 Das Gefangenendilemma
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 Feiglingsspiel
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - Situationsanalyse

Die Ausgangslage

- Zwei Sportwagen
- Hohe Geschwindigkeit
- Kollisionskurs
- Wer ausweicht, verliert
- Weicht keiner aus, sind beide tot
- Der Tod ist schlimmer als das Verlieren

Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrix

	B: Ausweichen		B: Weiterfahren	
A: Ausweichen	A:	B:	A:	B:
A: Weiterfahren	A:	B:	A:	B:

Ordnen Sie folgende Auszahlungen entsprechend in die Matrix ein: 0, 0, 2, 2, 4, 4, 6, 6

Inhaltsverzeichnis

- 1 **Das Gefangenendilemma**
 - Situationsbeschreibung
 - Das Nash-Gleichgewicht
 - Situationsverschärfung
 - Mathematische Fragen

- 2 **Feiglingsspiel**
 - Situationsbeschreibung
 - **Situationsanalyse**

Die Auszahlungsmatrix

	B: Ausweichen		B: Weiterfahren	
A: Ausweichen	8	A:4 B:4	8	A:2 B:6
A: Weiterfahren	8	A:6 B:2	0	A:0 B:0

- Was ist die kollektiv beste Strategiekombination?
- Welche Strategiewahl ist individuell vorteilhaft?
- Welche Nash-Gleichgewichte gibt es in diesem Spiel?

Analyse der Auszahlungsmatrix

	B: Ausweichen		B: Weiterfahren	
A: Ausweichen	8	A:4 B:4	8	A:2 B:6
A: Weiterfahren	8	A:6 B:2	0	A:0 B:0

- Kollektive beste Strategiekombinationen
 - Alle außer Weiterfahren/Weiterfahren
- Individuell beste Strategie
 - keine Entscheidung möglich
- Nashgleichgewichte
 - Zwei in reinen Strategien: Ausweichen/Weiterfahren und Weiterfahren/Ausweichen
 - Eines in gemischten Strategien: Beide Spieler weichen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ aus

Weiterführende Analyse

- Grenzen des Modells
 - Ausweichen zu verschiedenen Zeitpunkten
 - Ausweichen in dieselbe Richtung
- Glaubwürdige Selbstbindung
- Irrationales Spiel

Danke für die Aufmerksamkeit

Falls Sie Interesse an diesem Thema gefunden haben:
Das Institut für Mathematik in Klagenfurt bietet eine Vorlesung über
Spieltheorie an