Wie sichert man eine Million?

Vortrag im Rahmen des
Treffpunkt Mathematik 2009
Institut für Mathematik
Universität Klagenfurt

H. Kautschitsch und G. Kadunz

TOM TREFFPUNKT MATHEMATIK

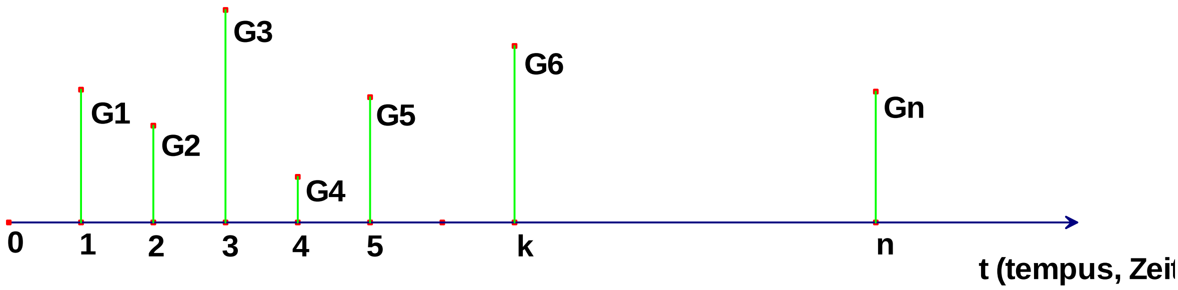
0. Die Problemstellung

Jemand weiß, dass er in 5 Jahren 1.000.000 € zurückzahlen muss oder sicher besitzen möchte. Der Marktzinssatz *i* sei derzeit 4%. Er könnte jetzt ein Kapital $K_0 = 821.927,10$ € auf ein Sparbuch legen. Dann hätte er in 5 Jahren nach der Zinseszinsformel

$$K_5 = K_0\,(1+i)^5$$

gerade 1.000.000 €. Der Anleger überlegt sich, ob er günstiger investieren könnte? Aktien sind ihm zu unsicher. Anleihen gelten als sicherer und haben in der Regel eine gute Rendite in Abhängigkeit vom Marktzinssatz. Mit solchen Anleihen wollen wir uns nun beschäftigen. Bei einer Anleihe – auch gesamtfällige Obligation, Bond genannt – erhält man jährlich einen vertraglich festgelegten Geldbetrag (Kupon), dessen Höhe *j %* vom investierten Kapital beträgt. Am Ende der vertraglich fixierten Laufzeit von *n*-Jahren erhält man das investierte Kapital K_0 und die letzte Kuponzahlung.
Im Folgenden werden wir uns mit allgemeinen Geldflüssen – Cashflow, auch Zahlungsstrom genannt – beschäftigen.

1. Allgemeiner Zahlungsstrom (Cashflow)



Wir betrachten einen *sicheren* (nachschüssigen) Zahlungsstrom:
G_k sei ein fester Geldbetrag am Ende des k-ten Jahres. Folgende Bezeichnungen wollen wir verwenden (Zinssätze, Ein- und Auszahlungen beziehen sich immer auf ein Jahr):

- i…Marktzinssatz, Abkürzung für: **i**nterest = Zins
- n… Laufzeit des Zahlungsstromes in Jahren
- $r = 1 + i$ … Aufzinsungsfaktor
- $v = \frac{1}{1+i}$ … Abzinsungsfaktor
- $V(0) = K_0$ … Barwert (B), **P**resent **v**alue (PV)
- $V(n) = K_n$ … Endwert (E) in n Jahren, **F**uture **v**alue (FV)

Aufzinsen

Vereinbarung: Zinsen werden am Ende jedes Jahres zum vorhandenen Kapital hinzugefügt (dekursiver Zinseszins). Damit erhält man folgende Zinseszinsformel:

$$K_n = K_0\,(1+i)^n = K_0\,r^n$$

Kurz gesprochen: „1 heute ist in n Jahren r^n wert"
Wegen: K_0= 1 Geldeinheit (GE) → K_n= $1(1+i)^n = r^n$

Abzinsen (diskontieren)

Aus der Zinseszinsformel erhält man durch Auflösen nach K_0:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n v^n$$

Kurz gesprochen: „1 in n Jahren ist heute v^n wert“

Barwert und Endwert

Um Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten vergleichen zu können, müssen sie wegen des Zinseszinseffektes auf einem festen Zeitpunkt bezogen werden.

Barwert B oder PV des Zahlungsstromes ist dessen Wert zum Zeitpunkt t = 0.

$$PV = B = G_1 v + \ldots + G_k v^k + \ldots + G_n v^n = \sum_{k=1}^{n} G_k v^k$$

Bei einem konstanten Zahlungsstrom der Höhe 1: $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = 1$ erhält man:

$$a_n := PV = B = v + \ldots + v^k + \ldots + v^n = \frac{1-v^n}{i}$$

Endwert E oder FV des Zahlungsstromes ist dessen Wert zum Zeitpunkt t = n.

$$FV = E = G_1 r^{n-1} + \ldots + G_k r^{n-k} + \ldots + G_n = \sum_{k=1}^{n} G_k r^{n-k} \text{ oder } E = B r^n$$

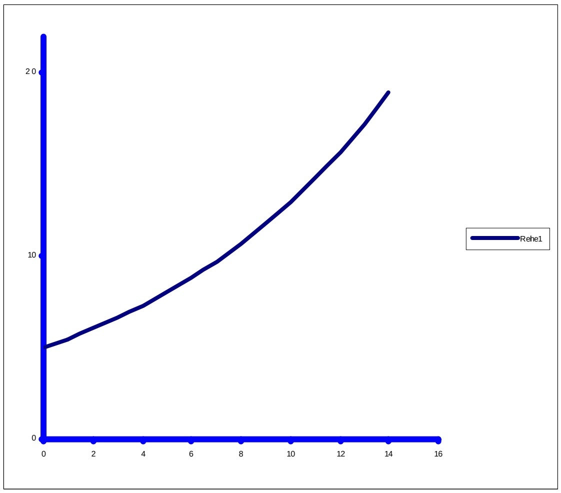
Bei einem konstanten Zahlungsstrom der Höhe 1: $G_1 = G_2 = \ldots = G_n = 1$ erhält man:

$$s_n := FV = E = 1 + r + \ldots + r^k + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{i} \text{ oder } s_n = a_n r^n$$

Betrachten wir den Zwischenwert V zum Zeitpunkt $t = \tau$, so gilt:

$$V(\tau) = \sum_{k=1}^{n} G_k r^{\tau-k} = PV r^{\tau} = B r^{\tau}$$

Zeit t	Kapital
0	5,00
1	5,50
2	6,05
3	6,66
4	7,32
5	8,05
6	8,86
7	9,74
8	10,72
9	11,79
10	12,97
11	14,27
12	15,69



2. Einfluss von Zinsänderungen

Was geschieht, wenn sich der Zinssatz ändert?
1. Experiment: Zinssatzänderung $\Delta i = \pm$ k%
Annahme zur Modellvereinfachung. Die Zinssatzänderung erfolgt unmittelbar nach Beginn des Betrachtungszeitpunktes $t = 0^+$.

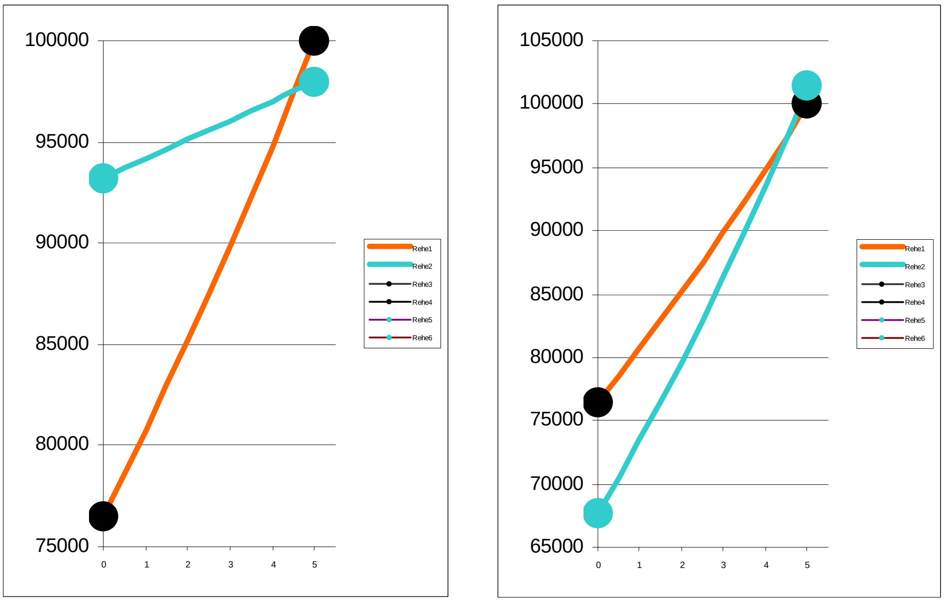


Abbildung 1:Δi>0 Bezugskurve (rot) bzw. Δi<0; Bezugskurve (rot)

Symbolisch geschrieben: $\Delta i > 0 \rightarrow$ B kleiner, E größer, $\Delta i < 0 \rightarrow$ B größer, E kleiner

> ***1. Beobachtung*: Bei ein und demselben Zahlungsstrom ändern sich Bar – und Endwerte gegenläufig!**

Begründung:

Bezeichnet i den alten Marktzinssatz, dann ist $v_{alt} = \dfrac{1}{1+i}$.

Bezeichnet $i + \Delta i$ den neuen Marktzinssatz, dann ist entsprechend $v_{neu} = \dfrac{1}{1+i+\Delta i}$ und es gilt:

$\Delta i > 0$	$\Delta i < 0$
$\mathbf{v_{alt} > v_{neu}}$	$\mathbf{v_{alt} < v_{neu}}$

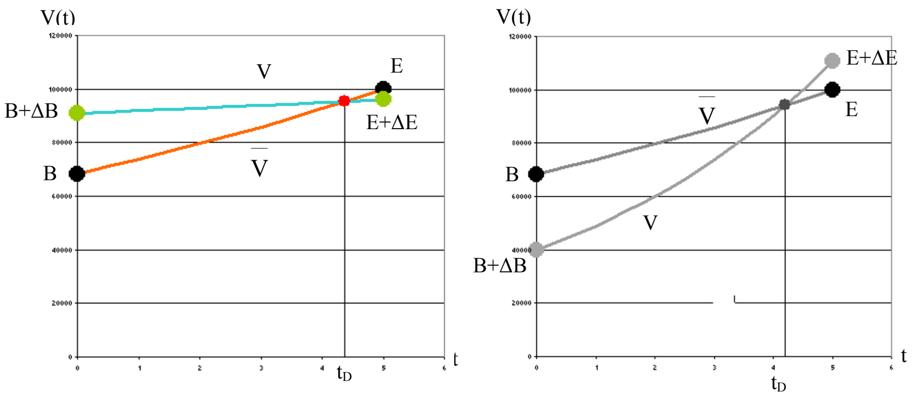
Ist B der alte Barwert und $B + \Delta B$ der neue Barwert, dann bezeichnet ΔB die absolute Barwertänderung. Für dieses ΔB können wir folgende Gleichung angeben:

$\Delta B = \sum_{k=0}^{n} G_k \left[(v_{neu})^k - (v_{alt})^k\right]$, also: $\Delta B < 0$ falls $\Delta i > 0$ und $\Delta B > 0$ falls $\Delta i < 0$.

3. Der Zeitpunkt der Gleichwertigkeit: t_D

Bei Änderung des Zinssatzes ändern sich Bar- und Endwerte, also auch Zwischenwerte zu einem beliebigen Zeitpunkt t. Kann es geschehen, dass geplante Werte $\overline{V}(t)$ mit tatsächlich erreichten Werten V(t) übereinstimmen?

2. Experiment: Variiere Δi und beobachte die Werteverläufe.



t_D für $\Delta i<0$ und t_D für $\Delta i>0$

> ***2. Beobachtung:* Für jeden Zahlungsstrom existiert ein Zeitpunkt t= t_D, in dem der geplante Wert $\overline{V}$ (t) mit dem tatsächlichen Wert V (t) übereinstimmt.**

Dieses t_D wollen wir nun berechnen. Aus $\overline{V}(t_D) = V(t_D)$ folgt

$$B\,(1+i)^{t_D} = (B+\Delta B)\,(1+i+\Delta i)^{t_D}$$

$$\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)^{t_D} = \frac{B+\Delta B}{B}$$

Die gesuchte Variable befindet sich im Exponenten. Wir müssen also "logarithmieren[1]" und erhalten die *Gleichgewichtsformel*:

$$t_D = \frac{\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right)}{\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)}$$

[1] Für die Funktion f(x):=ln x gilt definitionsgemäß: $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$. Damit gilt bekanntlich $\ln(a^b) = b \ln a$. Später werden wir noch folgende Abschätzung benötigen:
$\ln(1+x) \approx x$ für „kleine" x.

Aus dem zweiten Experiment können wir ablesen, dass für diesen Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D folgende Beziehungen gelten:

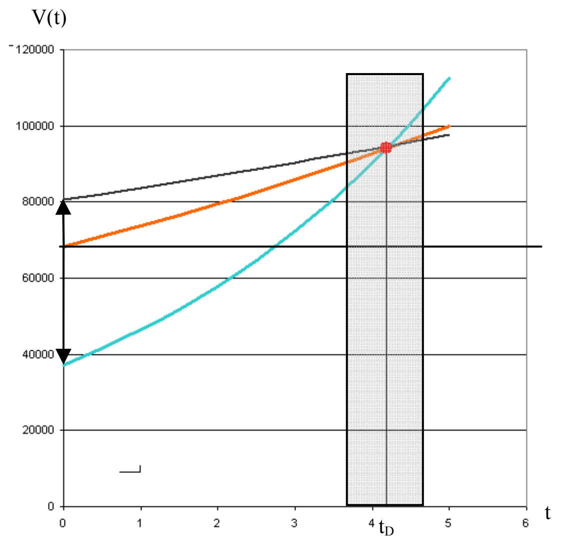
	$\Delta i < 0$	$\Delta i > 0$
$t < t_D$	$\overline{V}<V$	$\overline{V}>V$
$t = t_D$	$\overline{V}=V$	$\overline{V}=V$
$t > t_D$	$\overline{V}>V$	$\overline{V}<V$

Tabelle 2

Wir interpretieren Tabelle 2:

Steigt der Zinssatz ($\Delta i>0$), dann ist der geplante Wert $\overline{V}(t)$ vor dem Gleichgewichtszeitpunkt (also: $t<t_D$) größer als der tatsächliche Wert V(t) (also: $\overline{V}<V$). Nach dem Gleichgewichts-zeitpunkt (also: $t>t_D$) ist der geplante Wert kleiner als der tatsächliche Wert (also: $\overline{V}<V$).
Fällt der Zinssatz ($\Delta i<0$), dann ist der geplante Wert $\overline{V}(t)$ vor dem Gleichgewichtszeitpunkt (also: $t<t_D$) kleiner als der tatsächliche Wert (also: $\overline{V}<V$) und nach dem Gleichgewichtszeitpunkt größer (also: $\overline{V}>V$).

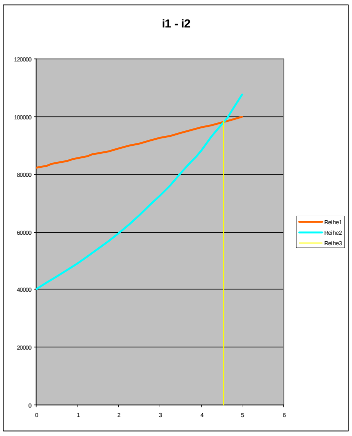
3. Experiment: Beobachten wir die Gleichwertigkeitszeitpunkte t_D für verschiedene Zinssatzänderungen Δi .

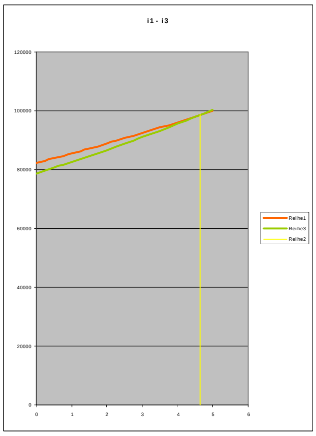


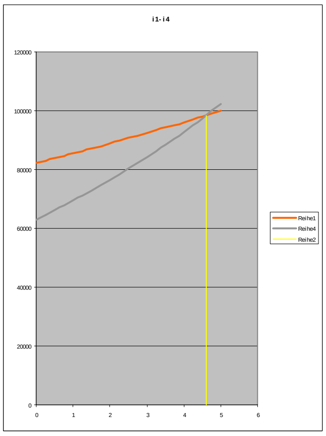
Eine Überraschung:

> ***3. Beobachtung*: Selbst relativ große Zinsänderungen, gleichgültig in welche Richtung, bewirken nur kleine Änderungen von t_D.**

4. Experiment: Wann tritt der Gleichwertigkeitspunkt t_D in Abhängigkeit von Δi ein?







Mit Zahlenwerten:

Zinsänderung Δi	t_D
+6%	4,6008 t_D tritt **früher** ein
+1%	4,6251
-1% $< \Delta i < +1\%$	wird noch genauer untersucht
-1%	4,6346
-3%	4,6440 t_D tritt **später** ein

Tabelle 3

Wieder eine Überraschung:

> ***4. Beobachtung*: Je stärker die Zinsen steigen, umso früher tritt t_D ein. Je stärker Zinsen fallen, umso später tritt t_D ein.**

Erinnerung:

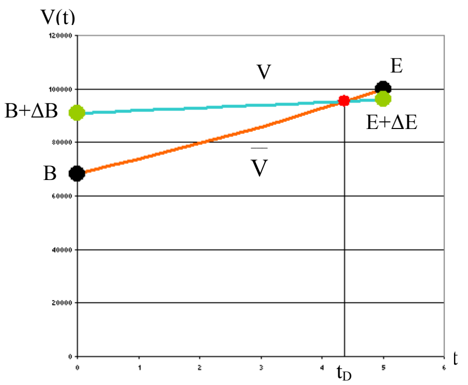
Zinsänderung Δi	t_D
+6%	4,6008 t_D tritt **früher** ein
+1%	4,6251
-1% $< \Delta i <$ +1%	wird noch genauer untersucht
-1%	4,6346
-3%	4,6440 t_D tritt **später** ein

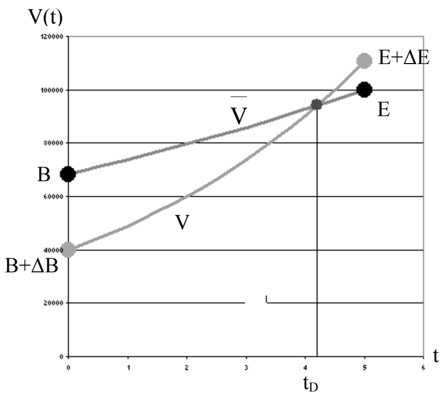
Tabelle 3

> ***4. Beobachtung*: Je stärker die Zinsen steigen, umso früher tritt t_D ein. Je stärker Zinsen fallen, umso später tritt t_D ein.**

	$\Delta i < 0$	$\Delta i > 0$
$t < t_D$	$\overline{V} < V$	$\overline{V} > V$
$t = t_D$	$\overline{V} = V$	$\overline{V} = V$
$t > t_D$	$\overline{V} > V$	$\overline{V} < V$

Tabelle 2a





t_D für $\Delta i<0$ und t_D für $\Delta i>0$

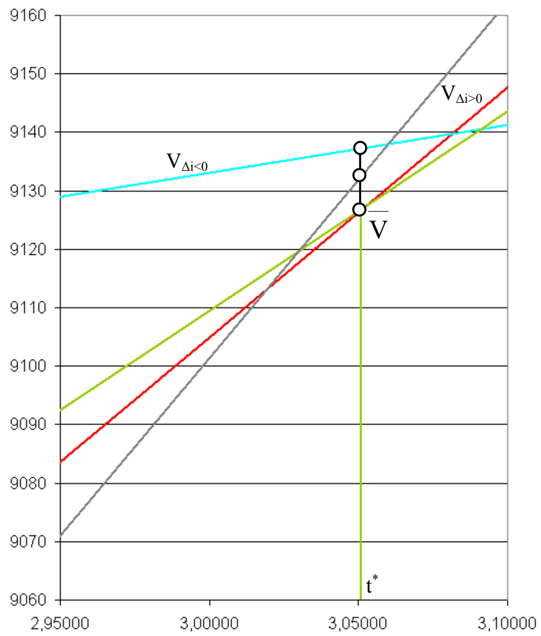
Wir interpretieren die rot unterlegten Felder der Tabelle 2a:

Steigt der Zinssatz, dann ist der geplante Wert nach dem Gleichgewichtszeitpunkt kleiner als der tatsächliche Wert.
Fällt der Zinssatz, dann ist der geplante Wert vor dem Gleichgewichtszeitpunkt kleiner als der tatsächliche Wert.

4. Zinsunempfindlichkeit

Beide überraschende Beobachtungen können wir nun ausnutzen, um uns vor unerwünschten Folgen von Zinssatzänderungen zu schützen (*Zinssatzimmunisierung*).

5. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für $\Delta i = -1\%$ fest. Diesen Zeitpunkt wollen wir mit t^* bezeichnen, also $t^*:=t_D(\Delta i=-1\%)$. Betrachte nun Zinssatzänderungen kleiner als -1% bzw. größer +1% ($\Delta i < -1\%$ oder $\Delta i > +1\%$).



Die Abbildung zeigt unterschiedlich gefärbte Grafen:
grau: tatsächlicher Wert bei Δi>1%; grün: tatsächlicher Wert bei Δi=1%
blau: tatsächlicher Wert Δi<-1%; rot: geplanter Wert, d.h. Δi=0%

***5. Beobachtung*: Für $\Delta i < -1\%$ und $\Delta i > +1\%$ ($|\Delta i| > 1\%$) ist der geplante Wert zu $t=t_D$ immer kleiner als der tatsächliche Wert. Jede Zinsänderung, unabhängig von Richtung und Ausmaß, führt zu einem höheren Endwert.**

Begründung:

1. Fall: Wenn Δi>1% (d.h., der Zinssatz steigt um mehr als 1%), dann tritt nach Tabelle 3 der Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für dieses Δi **früher** ein. Also ist t* ein Zeitpunkt nach dem Gleichgewichtszeitpunkt t_D ($t^* > t_D$). Nach Tabelle 2a gilt daher zum Zeitpunkt t*, dass der geplante **kleiner** als der tatsächliche Wert ist, also

$\overline{V} < V$.

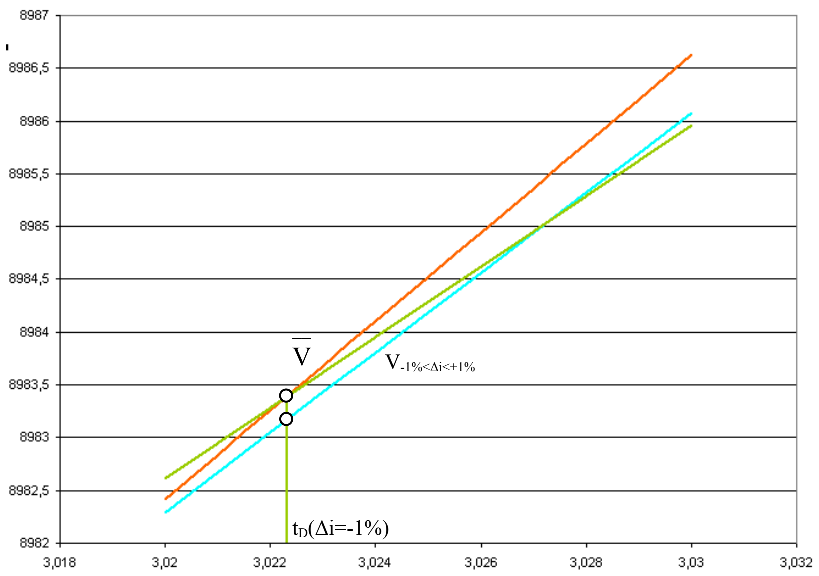
2. Fall: Wenn Δi<-1% (d.h., der Zinssatz fällt um mehr als 1%), dann tritt nach Tabelle 3 der Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für dieses Δi **später** ein. Also ist t* ein Zeitpunkt vor dem Gleichgewichtszeitpunkt t_D ($t^* < t_D$). Nach Tabelle 2a gilt daher zum Zeitpunkt t^*, dass der geplante wieder **kleiner** als der tatsächliche Wert ist, also

$\overline{V} < V$.

Bei | Δi |>1% gilt also, dass der geplante **immer kleiner** als der tatsächliche Wert ist[2].

Was geschieht, wenn die Zinsänderung Δi zwischen -1% und 1% liegt?

6. Experiment: Halte den Gleichwertigkeitszeitpunkt t_D für -1% fest. Betrachte nun Zinssatzänderungen -1% < Δi < +1%.



***6. Beobachtung:* Es kann es passieren, dass $\overline{V}$ >V ist. Also fällt der tatsächliche erzielte Wert kleiner als der geplante Wert aus.**

Es gibt also eine Unsicherheitszone $-1\% < \Delta i < +1\%$. Für diesen Ausdruck schreibt man auch $|\Delta i| < 1\%$.

Unser Bestreben wird es sein, diese Unsicherheitszone zu verkleinern.

$$|\Delta i| < 0{,}1\%,\ |\Delta i| < 0{,}01\%, \ldots$$

[2] Dass $\overline{V}$ stets kleiner oder gleich V ist, kann mit Mitteln der höheren Analysis gezeigt werden.

7. Experiment: Führe das 6. Experiment nun für $|\Delta i| < 1\%$ nummerisch durch. Verwende dazu die Gleichgewichtsformel (Seite 5)

Δi	$\frac{B+\Delta B}{B}$	$A := \ln(\frac{B+\Delta B}{B})$	$\frac{1+i}{1+i+\Delta i}$	$B := \ln(\frac{1+i}{1+i+\Delta i})$	$t_D = \frac{A}{B}$
1,00000000%	0,955051115	-0,045990416	0,99047619	-0,00956945	4,80596183
0,10000000%	0,99538948	-0,004621181	0,99903939	-0,00096108	4,80833863
0,01000000%	0,999537766	-0,000462341	0,99990386	-9,6149E-05	4,80857513
0,00100000%	0,999953765	-4,62363E-05	0,99999038	-9,6153E-06	4,80859877
0,00010000%	0,999995376	-4,62365E-06	0,99999904	-9,6154E-07	4,80860113
0,00001000%	0,999999538	-4,62365E-07	0,9999999	-9,6154E-08	4,80860136
0,00000100%	0,999999954	-4,62366E-08	0,99999999	-9,6154E-09	4,80860133
0,00000010%	0,999999995	-4,62366E-09	1	-9,6154E-10	4,80860107

Tabelle 4

7. Beobachtung: **Die Zahlenwerte für die Größen A und B werden für immer kleiner werdende Δi (Δi strebt gegen 0; symbolisch $\Delta i \to 0$) auch immer kleiner. Trotzdem scheint der Quotient t_D einen bestimmten Wert anzunehmen.**

Dies ist bemerkenswert, weil Quotienten aus immer kleiner werdenden Zahlen ($\frac{0}{0}$) im allgemeinen beliebige Werte annehmen können. Man nennt $\frac{0}{0}$ in diesem Zusammenhang eine unbestimmte Form.

Beispiele:

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{oder} \qquad a_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$b_n = \frac{2}{n} \to 0 \qquad\qquad b_n = \frac{1}{\mathrm{k\,n}} \to 0$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1*n}{n*2} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\mathrm{n}} : \frac{1}{\mathrm{k\,n}} = \mathrm{k}\text{, k beliebig}$$

Im Folgenden wollen wir diesen bei Zahlungsströmen auftretenden unbestimmten Ausdruck mit einer Formel beschreiben.

5. Der Begriff der Duration eines Zahlungsstromes

Beim vorhergehenden Experiment konnten wir beobachten, dass eine Zinssatzänderung Δi eine Änderung des Barwertes B auf den neuen Barwert B+ΔB bewirkte. B ist also eine Funktion B(i) des Zinssatzes i (siehe auch die erste Beobachtung).
Für diesen neuen Barwert erhalten wir nach Umformung:

$$\mathrm{B} + \Delta B = \mathrm{B}\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \text{ und } \frac{B+\Delta B}{B} = 1+\frac{\Delta B}{B}.$$

Da in der Gleichwertigkeitsformel der Logarithmus auftritt, erhalten wir nach Anwendung der Abschätzung für den Logarithmus aus der Fußnote 1:

$$\ln\frac{B+\Delta B}{B} = \ln\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \approx \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{i}}\,\frac{\Delta \mathrm{i}}{\mathrm{B}}$$

Strategie: Wenn wir $\frac{\Delta B}{\Delta i}$ abschätzen könnten, dann wüssten wir auch, wie groß $\frac{\Delta B}{B}$ und damit auch $\ln\frac{B+\Delta B}{B}$ ist! Dann könnte wir eine Formel für obigen unbestimmten Ausdruck angeben.

Bekanntlich kann man Differenzenquotienten durch Differentialquotienten abschätzen.

$$\frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta \mathrm{i}} \approx \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{di}}$$

Aus der Summenregel und der Kettenregel erhalten wir für $\mathrm{B(i)}=\sum \mathrm{G_k v^k}$:

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{di}} = \sum \mathrm{kG_k v^{k-1}}(-\mathrm{v}^2) = -(\sum \mathrm{kG_k v^k})\mathrm{v}.$$

Dabei haben wir benützt: $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{di}} = \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{di}} = (-1)(1+\mathrm{i})^{-2} = -\mathrm{v}^2$.

Damit ist

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta B}{\Delta i}\frac{\Delta i}{B} \approx \frac{dB}{di}\frac{\Delta i}{B} = -(\sum kG_k v^k)\, v\frac{\Delta i}{B}$$

oder:

$$\frac{\Delta B}{B} \approx - \frac{\sum kG_k v^k}{B} v\,\Delta i$$

***Definition 1*: Der Ausdruck $\frac{\sum kG_k v^k}{B}$ heißt die Duration D des Zahlungsstromes (G_1, …, G_n).**

Mit dieser Definition 1 erhalten wir für die relative Barwertänderung:

$$\boxed{\frac{\Delta B}{B} \approx -D\,v\,\Delta i}$$

Anmerkung: Das negative Vorzeichen drückt die Gegenläufigkeit der Barwertänderung zur Zinsänderung aus. Nun können wir den Zeitpunkt der Gleichwertigkeit bestimmen.

$$\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right) = \ln\left(\frac{B\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right)}{B}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \approx \frac{\Delta B}{B} \approx \text{-D v } \Delta i$$

$$\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right) = \ln\left(1+\frac{-\Delta i}{1+i+\Delta i}\right) \approx \frac{-\Delta i}{1+i+\Delta i}$$

Damit ist

$$t_D = \frac{\ln\left(\frac{B+\Delta B}{B}\right)}{\ln\left(\frac{1+i}{1+i+\Delta i}\right)} \approx \frac{-D\,v\,\Delta i\,(1+i+\Delta i)}{-\Delta i} = \text{D v } (1+i+\Delta i)$$

Strebt nun Δi gegen 0, dann strebt t_D gegen D (weil D v (1+i) = D gilt).

Die feste Zahl in der Tabelle 4 ist gerade die Duration D des Zahlungsstromes.

6. Die „immunisierende“ Eigenschaft der Duration

Aus den bisherigen Experimenten und Überlegungen ergibt sich:

1) Wenn $\Delta i \to 0$, dann ist die Unsicherheitszone immer kleiner
2) Wenn $\Delta i \to 0$, dann nimmt der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ für t_D einen festen Wert an, nämlich $t_D = D$.

Damit kann man sagen:
Zu jedem Zahlungsstrom($G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$) gibt es einen Zeitpunkt, nämlich t =D, in dem der tatsächliche Wert des Zahlungsstromes immer größer oder gleich dem geplanten Wert ist, ungeachtet, wie groß und in welche Richtung eine Zinsänderung erfolgt[3]:

$$\overline{V}(D) \leq V(D)$$

Damit kennt man schon zum Zeitpunkt t = 0, welchen Wert der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt t = D mindestens haben wird (der Wert ist „immun“ gegen Zinsänderungen). Es ist so, als ob der Zinssatz zum Zeitpunkt t = 0 bis zum Zeitpunkt t = D eingefroren wird („lock-in“ Effekt der Duration). Dies rechtfertigt den Namen „ Duration“: Zeitspanne, bis zu welcher der Zinssatz eingefroren ist.

Die Duration kann auch als Hebelfaktor interpretiert werden, der eine Zinsänderung in eine Barwertänderung umwandelt:
Setzt man in: $\frac{\Delta B}{B} \approx -D\,v\,\Delta i$ für D v =: $D^{(m)}$, dann erhält man für die relative Barwertänderung:

$$\boxed{\frac{\Delta B}{B} \approx -D^{(m)}\,\Delta i}$$

$D^{(m)}$ gibt also an, wie sich eine Zinssatzänderung auf die Barwertänderung auswirkt.
$D^{(m)}$ ist ein Hebelfaktor, der Zinsänderungen in Barwertänderungen umwandelt.

Definition 2: **Die Zahl $D^{(m)} = D^*v$ heißt die modifizierte Duration des Zahlungsstromes.**

Die modifizierte Duration ist jener Wert, um den sich der Barwert eines Zahlungsstromes bei einer Zinssatzänderung von $\Delta i = 1\%$ ändert.
Beispiel: Ist $D^{(m)} = 7{,}63$ und $\Delta i = +1\%$, so wird der Barwert um ca. 7,63% fallen.
Ist $\Delta i = -1\%$, so wird der Barwert um ca. 7,63% steigen.

[3] Diese Ungleichung kann mit Mitteln der höheren Analysis begründet werden.

7. Immunisierung in einem Intervall

In der Regel ist es schwierig, eine Anleihe mit vorgegebener Duration zu finden. Glücklicherweise kann man durch eine Mischung zweier Anleihen A_1 mit Duration D_1 und A_2 mit Duration D_2 jeden Zeitpunkt $D \in [D_1, D_2]$ als Duration erreichen!

Sei w der Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_1 investiert wird und 1-w jener Prozentsatz, mit dem in Anleihe A_2 investiert wird. Dann gilt für die Duration D_{PF} des „Portefeuilles“ aus A_1 und A_2:

$$\boxed{D_{PF} = w\,D_1 + (1-w)\,D_2}$$

Begründung:

A_1 habe den Zahlungsstrom $(G_1, G_2, G_3 \ldots, G_m)$
A_2 habe den Zahlungsstrom $(Z_1, Z_2, Z_3 \ldots, Z_n)$

Das Portefeuilles hat dann den Zahlungsstrom $(G_1+Z_1, \ldots, G_m+Z_m, \ldots, G_n+Z_n)$.
B sei das „Investitionsvolumen“.

Wird ausschließlich in A_1 investiert dann gilt:

$$B = \sum_{k=1}^{m} G_k v^k \text{ und } D_1 = \frac{\sum_1^m k G_k v^k}{B}$$

Wird ausschließlich in A_2 investiert, dann gilt:

$$B = \sum_{k=1}^{n} G_k v^k \text{ und } D_2 = \frac{\sum_1^n k G_k v^k}{B}$$

Werden w Anteile in A_1 und 1-w Anteile in A_2 investiert, dann gilt:

$$B = w \sum_{k=1}^{m} G_k v^k + (1-w) \sum_{k=1}^{n} Z_k v^k = \sum_{k=1}^{r} (w\,G_k + (1-w)\,Z_k)\,v^k \text{ mit } r = \max(m,n).$$

Bei dieser Umformung benutzten wir:

$$\sum a_k + \sum b_k = \sum (a_k + b_k)$$

$$\sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$$

Für die Duration des Portefeuilles D_{PF} gilt dann:

$$D_{PF} = \frac{\sum_{k=1}^{r} k\,[wG_k + (1-w)\,Z_k]\,v^2}{B}$$

$$= \frac{w\sum_{1}^{r} k\,G_k\,v^k + (1-w)\sum_{1}^{r} k\,Z_k\,v^k}{B}$$

$$= w\underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{m} k\,G_k v^k}{B}}_{D_1} + (1-w)\underbrace{\frac{\sum_{k=1}^{n} k\,Z_k v^k}{B}}_{D_2} = w\,D_1 + (1-w)\,D_2$$

Mit diesen Überlegungen kann das *Durationsprinzip* formuliert werden:

Will man nun Immunisierung zum Zeitpunkt $D \in (D_1, D_2)$ erreichen, dann bildet man ein Portefeuille aus A_1 und A_2 so, dass für dessen Duration D_{PF} die Gleichung $\mathbf{D_{PF} = D}$ gilt. Aus der Formel für die Duration eines Portefeuilles folgt für die „Gewichtung" w in die Anleihe A_1 und damit 1-w in die Anleihe A_2:

$$D = w\,D_1 + (1 - w)\,D_2$$
$$D = w\,D_1 + D_2 - w\,D_2$$
$$w\,D_2 - w\,D_1 = D_2 - D$$
$$w\,(D_2 - D_1) = D_2 - D$$

Weil $D_1 \neq D_2$ ist, kann man durch $D_2 - D_1 \neq 0$ dividieren und man erhält:

$$\boxed{w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}}$$

Damit erhält man folgende **Immunisierungsstrategie** zur Absicherung eines Geldbetrages G in D Jahren:

1) Berechne das Investitionsvolumen B als Barwert des abzusichernden Geldbetrages G (v ist der Abzinsungsfaktor zum aktuellen Zinssatz i):

$$B = G\, v^D$$

2) Suche zwei Anleihen A_1 und A2 mit Durationen D_1, D_2 so, dass

$$D_1 < D < D_2 .$$

3) Investiere also in A_1 mit w% und in A_2 mit (1-w)% von B, wobei

$$w = \frac{D_2 - D}{D_2 - D_1}$$

Dann wird zum Zeitpunkt t = D mindestens der Betrag G vorhanden sein.

Beachte, dass in unseren Überlegungen folgende Modellvereinfachungen getroffen wurden:

- Es werden keine Transaktionskosten verrechnet.
- Es gibt keine mehrfachen Zinsänderungen im betrachteten Zeitraum.
- Die Zinsänderung erfolgte knapp nach Kauf des Wertpapiers.

Würde man diese Vereinfachungen nicht treffen, so wäre die Bestimmung des Immunisierungszeitpunktes wesentlich aufwendiger und würde Umschichtungen in den einzelnen Anleihen erfordern.