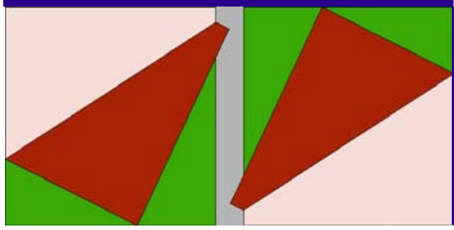
Mag. Gerhard Hainscho

Origami und Mathematik



Faltungen und mehr

Treffpunkt Mathematik ist eine Initiative der ARGE Mathematik AHS Kärnten in Zusammenarbeit mit dem Landesschulrat für Kärnten, der Pädagogischen Hochschule Kärnten, dem Regionalen Netzwerk Kärnten und IMST.

Klagenfurt, Jänner 2010

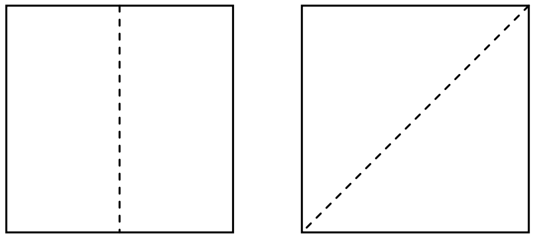
Inhalt

Zugaben

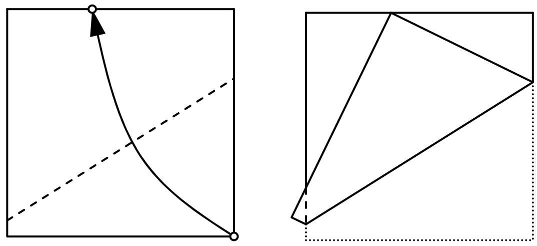
Die erste Falte

折り紙 … japanisch: oru = falten, kami = Papier

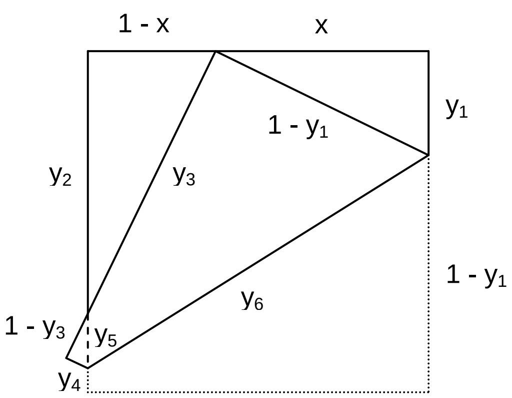
Typischerweise entstehen Origami-Objekte aus einem quadratischen Blatt Papier. Da jede Origami-Faltung eindeutig reproduzierbar sein muss, beginnt die Herstellung der allermeisten Objekte mit einer von zwei Faltungen: Sie halbieren das Quadrat über eine Seite oder über eine Diagonale.



Was sonst ist möglich? Sie können z.B. den Mittelpunkt oder bestimmte andere Punkte einer Quadratseite markieren und anschließend das Quadrat so falten, dass einer seiner Eckpunkte genau auf diesem markierten Punkt zu liegen kommt.



Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras und mit Hilfe der Ähnlichkeit von Dreiecken erhält man der ersten **Satz von Haga**:



$$y_1 = \frac{1-x^2}{2}$$

$$y_2 = \frac{2x}{1+x}$$

$$y_3 = \frac{1+x^2}{1+x}$$

$$y_4 = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$y_5 = 1-\left(\frac{2x}{1+x}+\frac{(1-x)^2}{2}\right)$$

$$y_6 = \sqrt{1+x^2}$$

Insbesondere ergeben sich für $x = 1/2$ rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten sich wie 3:4:5 verhalten („ägyptische Dreiecke“). Außerdem wird in diesem Spezialfall die linke vertikale Quadratseite durch die schräge Quadratseite im Verhältnis 2:1 geteilt ($y_2 = 2\cdot(y_4 + y_5)$).

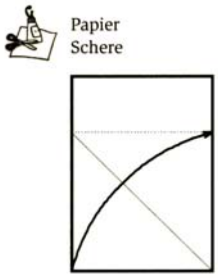
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Kazuo **Haga**: Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding. Singapore 2008 <World Scientific Publishing>. S 1 - 10.

Quadrat

Albrecht Beutelspacher

Literatur: Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>. S 17 - 19.



Durch Falten wird bestimmt, an welcher Stelle ein rechteckiges Blatt Papier abgeschnitten werden muss, um ein Quadrat zu erhalten.

Wenn Sie aus einem Blatt Schreibpapier ein möglichst großes Quadrat machen möchten, können Sie ein Lineal zu Hilfe nehmen. Ein Blatt im DIN-Format ist 21 cm x 29,7 cm groß. Sie müssen somit an den langen Kanten jeweils 21 cm abmessen und dann entsprechend abschneiden. Es geht aber auch ganz ohne Hilfsmittel. Legen Sie das Blatt hochkant vor sich. Falten Sie es so, dass die untere Kante vollkommen auf der rechten Kante zu liegen kommt. Der Knick verläuft dann durch die rechte untere Ecke. Der größte Teil der vormals linken Kante liegt jetzt quer über dem Blatt. Übertragen Sie ihren Verlauf auf die darunterliegende Papierlage und schneiden Sie diese entsprechend ab.

Warum kann man mit nur einem Knick aus einem Rechteck ein Quadrat machen? Das liegt an den Symmetrieeigenschaften des Quadrats. Es hat vier Symmetrieachsen. Zwei Symmetrieachsen erhält man, wenn man die Seitenmittelpunkte von gegenüberliegenden Seiten verbindet. Die anderen beiden Symmetrieachsen entsprechen den Diagonalen. Letztere wurden für die Herstellung des Quadrats aus dem Rechteck ausgenutzt.

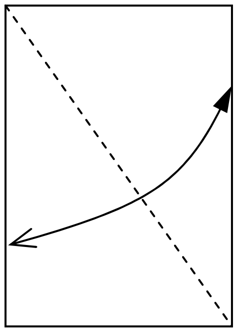
Beim Rechteck sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang. Alle Winkel sind 90°-Winkel. Beim Quadrat ist es zusätzlich erforderlich, dass nicht nur gegenüberliegende, sondern alle Seiten gleich lang sind. Das wird durch den Faltvorgang erreicht. Beim Falten an einer Diagonale des Quadrats werden jeweils zwei benachbarte Seiten aufeinandergefaltet. Daher müssen Sie die untere und die rechte Kante des ursprünglichen Rechtecks zur Deckung bringen. Der 90°-Winkel an der rechten unteren Ecke wird dabei halbiert, so wie es für die Diagonalen des Quadrats nötig ist. Die Länge der unteren Seite wird auf die Länge der rechten Seite übertragen. Gleichzeitig wird derjenige Teil der linken Seite des Rechtecks, der für das Quadrat benötigt wird, an die Stelle gefaltet, an der die vierte Seite des Quadrats entstehen soll. Dort wird das Rechteck anschließend entsprechend gekürzt.

Neben der Achsensymmetrie gibt es beim Quadrat auch Drehsymmetrie. Wenn Sie das Quadrat genau in der Mitte fixieren und dann um diesen Punkt drehen, gibt es vier Möglichkeiten, das Quadrat so zu drehen, dass es nachher in derselben Position liegt wie vorher: in einem Winkel von 90°, 180°, 270° oder 360°. Das Quadrat gehört zu den Grundformen mit besonders vielen Symmetrieeigenschaften. Das Rechteck hat in dieser Hinsicht weitaus weniger zu bieten. Sie können es nur um 180° oder 360° um den Mittelpunkt drehen, wenn Sie wollen, dass es wieder in derselben Position liegt. Auch gibt es nur zwei Symmetrieachsen: jeweils zwischen den Mittelpunkten gegenüberliegender Seiten.

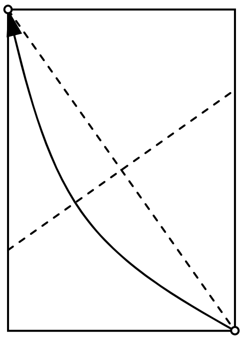
Bisher schien es so, als wäre die einzige Eigenschaft, in der sich das Quadrat und das Rechteck grundlegend unterscheiden, die Länge der größeren Seite des Rechtecks. Doch selbst dieses Maß taucht in beiden Formen auf. Wenn Sie das Quadrat nach dem Abschneiden nicht auffalten, hat es die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem rechten Winkel. Die Faltkante ist die eine Diagonale des Quadrats. Halten Sie diese Kante an die lange Seite eines Blattes Schreibpapier. Die Längen entsprechen sich!

Das ist nicht zufällig, sondern in der Festlegung des DIN-Formats für Papier begründet. Die lange Seite des Papiers ist immer etwa 1,41-mal so lang wie die kurze. Genau ausgedrückt ist das Verhältnis $1:\sqrt{2}$. Die Kantenlänge eines Quadrats steht zur Länge seiner Diagonale in einem immer gleichen Verhältnis. Das ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras. Quadriert man die beiden Längen der Seiten am rechten Winkel und addiert die Quadratzahlen, so entspricht die Summe dem Quadrat der dritten Seitenlänge. Die beiden Seiten neben dem rechten Winkel sind im Falle des gefalteten Quadrats gleich lang. Nimmt man diese Länge als Referenz und setzt sie gleich 1, so ergibt sich $1^2 + 1^2 = 2$. Die Diagonale hat dann die Länge $\sqrt{2}$. Das entspricht dem Maß der langen Rechtecksseite im Verhältnis zur kurzen.

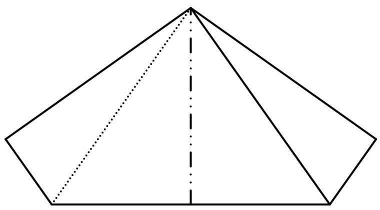
Fünfeck näherungsweise

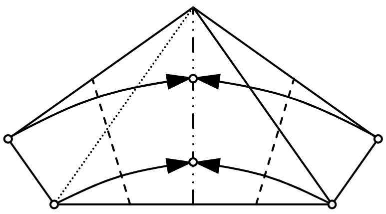


Falten Sie das Blatt entlang einer Diagonale und öffnen Sie es wieder.

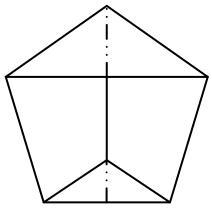


Falten Sie die Endpunkte dieser Diagonalen aufeinander.





Falten Sie die beiden Seitenteile so, dass die kurzen Außenkanten genau auf der Mittellinie (der ehemaligen Diagonalen) zu liegen kommen.



Hinweis: Diese Faltkonstruktion liefert *kein* reguläres Fünfeck, man erhält 3 etwas kürzere bzw. 2 etwas längere Seiten. Eine Rechnung zeigt, dass die längeren Seiten um ca. 4,5% länger als die kürzeren sind; als Innenwinkel ergeben sich 107,63° und 109,47° anstelle der exakten 108°.

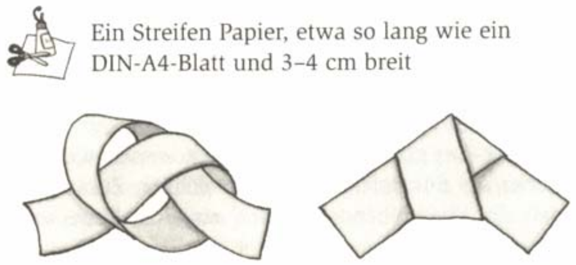
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. *URL:* http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)

Fünfeck exakt

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>. S 23 - 26.



Ein Papierstreifen wird durch einen Knoten zu einem Fünfeck.

Können Sie ein Quadrat freihändig zeichnen, sodass es als Quadrat erkennbar ist? Vermutlich ja. Können Sie das auch bei einem gleichseitigen Dreieck? Wahrscheinlich ist auch das möglich. Wenn Sie ein Sechseck „frei Hand“ zeichnen sollen, können Sie die Geometrie des Sechsecks ausnutzen, zum Beispiel die Tatsache, dass gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Das Fünfeck ist eine viel komplexere Form. Ein Fünfeck zu zeichnen ist wirklich schwierig. Es braucht viele Versuche und viel Übung, bis ein ohne Hilfsmittel gezeichnetes reguläres Fünfeck auch als solches erkennbar ist.

Mit einem Streifen Papier können Sie leicht ein Fünfeck herstellen, sogar ein reguläres, also eines, bei dem alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind. Sie müssen das Papier nur verknoten. Nehmen Sie dazu den Streifen und führen Sie die Enden so umeinander herum, wie Sie es bei einem normalen Knoten mit einem Seil machen würden. Aber Achtung: Den Knoten nicht einfach festziehen, sondern zunächst schön locker lassen!

Damit das Fünfeck gelingt, müssen Sie beim Festziehen etwas Geduld und Geschick walten lassen: Ziehen Sie langsam und vorsichtig an den Enden des Streifens. Ruckeln Sie das Papier dabei vorsichtig zurecht. Die einzelnen Papierlagen müssen eine Ebene bilden. Zu einem bestimmten Zeitpunkt beim Festziehen drücken Sie den Knoten fest. Der richtige Moment ist gekommen, wenn sich eine Ecke des Fünfecks deutlich abzeichnet. Zum Schluss werden die überstehenden Enden zu einer Seite umgeknickt.

Betrachten Sie das Fünfeck genauer: Wenn es gut geklappt hat, sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß. Über die Fläche des Fünfecks verlaufen mehrere Kanten, die den ursprünglichen Papierstreifen erkennen lassen. Eine Kante beginnt und endet in zwei der Ecken des Fünfecks. Es handelt sich daher um eine „Diagonale“. Die Diagonale ist parallel zur gegenüberliegenden Seite des Fünfecks, da es die beiden Kanten des Papierstreifens sind. Diese Eigenschaft, die Parallelität von Diagonalen und Seiten des Fünfecks, kann man beim Zeichnen eines Fünfecks als Hilfe verwenden.

Zeichnen Sie die Kante auf dem Fünfeckknoten mit einem breiten Stift nach und ergänzen Sie auch die anderen Diagonalen. Jede Ecke des Fünfecks muss mit allen gegenüberliegenden Ecken verbunden werden. Es entsteht ein wunderschöner fünfzackiger Stern, das „Pentagramm“! In der Mitte dieses Pentagramms erkennt man wieder ein Fünfeck, das „auf dem Kopf“ steht.

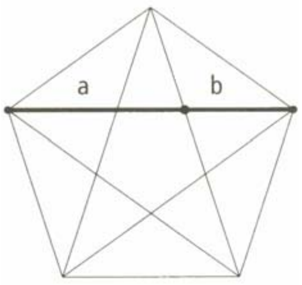
Wie viele Diagonalen hat das Fünfeck? Es gibt fünf Ecken, und von jeder Ecke gehen zwei Diagonalen aus: Zwei mal fünf ergibt zehn. Jede Diagonale wurde aber bisher doppelt gezählt, von jedem der beiden Enden aus. Daher sind es genau halb so viele, also fünf Diagonalen.

Die meisten von Menschen gezeichneten Sterne haben fünf Zacken, zum Beispiel auf Flaggen. Auch in der Natur findet man Fünfsterne, etwa beim Seestern oder, etwas näher liegend, wenn Sie einen Apfel quer durchschneiden.

Fünfeck exakt

Im Pentagramm steckt ein wichtiges Längenverhältnis, der Goldene Schnitt. Zwei Längen stehen im Goldenen Schnitt zueinander, wenn die längere etwa 1,618-mal so lang ist wie die kürzere. Anstelle dieser Zahl wird meistens der Buchstabe φ (Phi) geschrieben.

Jede Diagonale des Fünfecks wird durch zwei andere Diagonalen in drei Teile eingeteilt. Diese Einteilung entspricht dem goldenen Schnitt: Der längere Abschnitt a beginnt in einer Ecke und endet im zweiten Schnittpunkt. Der kürzere Abschnitt b beginnt in diesem Schnittpunkt und endet in der anderen Ecke.



Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts, wenn sich die größere zur kleineren verhält wie die Summe aus beiden zur größeren. Das kann man so zusammenfassen:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Das Verhältnis 1:1,618 erhält man aus dieser Bedingung. Der genaue Wert für φ ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Der Goldene Schnitt ist ein Längenverhältnis, das als besonders schön und harmonisch wahrgenommen wird. Dieses Verhältnis taucht an vielen Stellen in der Natur auf - zum Beispiel am Menschen. Der Bauchnabel teilt die Körpergröße in zwei Abschnitte: einen größeren von den Füßen bis zum Bauchnabel und einen kleineren vom Bauchnabel bis zum Kopf. Das Verhältnis entspricht bei den meisten Menschen etwa dem Goldenen Schnitt.

Auch in der Architektur ist der Goldene Schnitt zu finden, beispielsweise am Rathaus in Leipzig. Der Turm des Gebäudes wurde nicht in der Mitte der Fassadenfront errichtet, sondern seitlich versetzt, sodass die Fassade ebenfalls im Verhältnis 1:1,618 eingeteilt ist.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

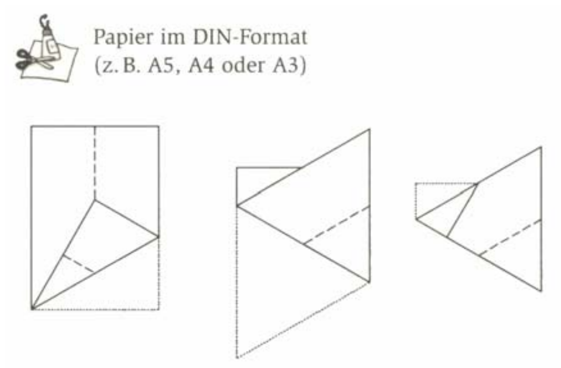
Literatur: Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>. S 23 - 26.

Dreieck

Albrecht Beutelspacher

Kann man aus einem gewöhnlichen rechteckigen Papier ein Dreieck falten? Klar, man muss nur eine Ecke umknicken. Doch so entstehen nur rechtwinklige Dreiecke. Wir wollen aber ein gleichseitiges Dreieck falten, also eines, bei dem alle Seiten gleich lang sind. Manche sagen, das sei das schönste Dreieck.

Mit nur einmaligem Falten kann man kein gleichseitiges Dreieck erhalten, aber mit ein bisschen mehr Aufwand schon. Und so geht es:



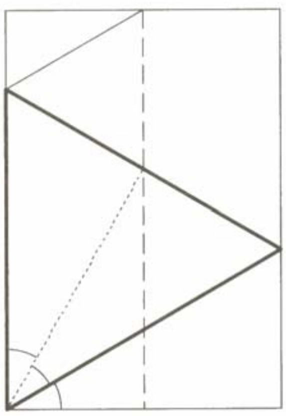
Zuerst braucht man eine Hilfslinie. Falten Sie das Blatt dazu längs in der Mitte, sodass die beiden langen Kanten aufeinander liegen. Klappen Sie es wieder auf und legen Sie es hochkant vor sich hin.

Nun kommt der entscheidende Schritt: Falten Sie die rechte untere Ecke des Blattes so ein, dass zwei Eigenschaften gleichzeitig erfüllt sind: Erstens muss die rechte untere Ecke auf der Hilfslinie in der Mitte liegen, und zweitens muss die neue Knickfalte durch die linke untere Ecke laufen. Das so entstandene Dreieck ist zwar noch nicht gleichseitig; aber seine längste Seite ist bereits die erste Seite des Dreiecks, das wir falten wollen.

Betrachten Sie die kürzeste Seite des gerade gefalteten Dreiecks. Denken Sie sich diese Seite verlängert und falten Sie das Papier entlang dieser Linie. Wenn Sie präzise gearbeitet haben, kommt die erste Faltkante genau auf die rechte Papierkante. Jetzt muss nur noch der überstehende Teil links oben abgeknickt werden, und fertig ist das Dreieck.

Wie kann man überprüfen, ob das Dreieck gleichseitig ist? Dafür gibt es viele Möglichkeiten. Sie können die Kantenlängen messen oder das Dreieck an den Symmetrieachsen falten, um zu sehen, ob die Kanten und Winkel einander entsprechen. Sie können aber auch - wenn Sie das Experiment mit anderen gemeinsam machen - mehrere Dreiecke übereinander oder (noch besser) aneinander legen.

Wie viele Dreiecke kann man an einer Ecke zusammenlegen? Daraus ergibt sich der Winkel: Einmal herum sind es 360°, durch 6 gibt 60°, also ist es auch ein gleichwinkeliges Dreieck.



Wieso kann man so einfach aus einem Rechteck ein gleichseitiges Dreieck machen, obwohl beide auf den ersten Blick nicht viel miteinander zu tun haben? Der entscheidende Schritt geschieht bereits beim ersten Falten. Hier wird der 90°-Winkel der linken unteren Ecke des Blattes in drei gleiche Teile geteilt. Zwei Teile zusammen bilden 60°, also genau den Winkel, den man für das gleichseitige Dreieck braucht.

Man kann das sogar beweisen: Wenn man das Dreieck wieder auffaltet, kann man sehen, dass die ursprüngliche untere Kante des Blattes nach dem ersten Falten genau eine Höhenlinie des Dreiecks bildet. Das ist die kürzeste Verbindung von einer Ecke zur gegenüberliegenden Seite. Im Fall des gleichseitigen Dreiecks trifft jede Höhe genau auf die Mitte einer Seite. Daher muss man die rechte untere Ecke zuerst auf die Hilfslinie in der Mitte falten. Die Hilfslinie teilt jede Verbindung zwischen der rechten und der linken Kante des Blattes automatisch in zwei gleiche Teile. Der Rest ist dann eine Wiederholung dieses Schrittes.

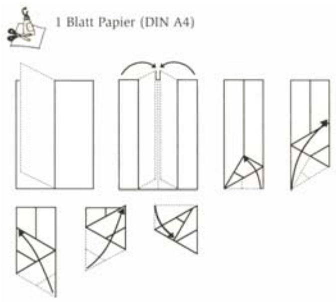
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt ... und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>. S 14 - 16.

Tetraeder

Albrecht Beutelspacher

Literatur: Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>. S 88 - 90.



Ein Blatt Papier wird zunächst zu einem Streifen und anschließend zu einem Dreieck gefaltet. Der so vorbereitete Streifen wird zu einem Tetraeder verbunden.

Falten Sie das Blatt entlang der langen Seite zur Hälfte. Es wird anschließend wieder aufgefaltet, und beide langen Kanten werden bis zum im ersten Schritt erzeugten Knick zur Mitte hin umgeschlagen. Man nennt das bis jetzt gefaltete Gebilde einen „Schrank“. Beide Kanten bilden eine Linie, die für den nächsten Schritt entscheidend ist.

Der auf diese Weise entstandene Papierstreifen wird in immer gleicher Weise gefaltet, bis daraus ein Dreieck entsteht. Beginnen Sie mit der rechten unteren Ecke des Streifens. Falten Sie diesen so, dass zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: Die Ecke muss auf der Mittellinie zu liegen kommen, und der neue Knick muss durch die linke untere Ecke verlaufen. Auf dem Papierstreifen ist ein kleines Dreieck entstanden. Seine längste Seite ist die erste Kante des späteren Tetraeders. Die kürzeste Seite ist für den nächsten Schritt entscheidend.

Die linke untere Ecke wird nun auf die rechte Kante gefaltet. Denken Sie sich die kürzeste Seite des Dreiecks verlängert: Sie ist die Faltkante für diesen Schritt. Nach dem Falten müsste die längste Kante des Dreiecks auf der rechten Kante des Papierstreifens zu liegen kommen.

Mittlerweile ist auf dem Papierstreifen ein gleichseitiges Dreieck entstanden. Wieder wird entlang von dessen Kante gefaltet, sodass die untere Kante des Dreiecks auf dem Rand des Papierstreifens zu liegen kommt. Dies können Sie noch zweimal durchführen, bis auch der überstehende Rest des Papierstreifens auf das Dreieck gefaltet wurde.

Die Vorbereitungen sind damit fast abgeschlossen. Aus dem dreieckigen Papierbündel können Sie jetzt einen Tetraeder herstellen. Falten Sie dazu das Papier so weit auf, bis Sie wieder den kompletten Papierstreifen vor sich haben. Dieser ist durch die Faltlinien in gleichseitige Dreiecke eingeteilt. Jedes dieser Dreiecke ist eine Seite des Tetraeders. Drei der Dreiecke sind vollständig. Einem fehlt eine kleine Ecke. Direkt daneben ist der Rest des Papierstreifens, den Sie zuletzt umgefaltet hatten. Ziehen Sie diese letzte Faltkante noch einmal scharf nach und falten Sie sie nicht wieder auf. Ihr Papierstreifen hat jetzt eine abgeschrägte Ecke. Von der einen Schmalseite des Papierstreifens ist nur ein kleiner Rest übrig.

Als Letztes müssen die beiden Enden des Streifens verbunden werden. Der Papierstreifen wurde durch die ersten Faltungen zweilagig. Das nutzen wir jetzt aus. Stecken Sie die abgestumpfte Ecke des einen Endes zwischen die beiden Lagen des halben Dreiecks am anderen Ende. Dabei entsteht der Tetraeder ganz von allein.

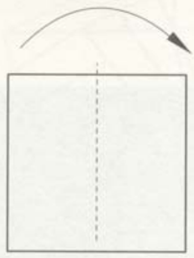
Sicher ist Ihnen aufgefallen, dass der Tetraeder nicht ganz perfekt ist: zwei Kanten sind offen. Die offenen Kanten liegen sich genau gegenüber. Wenn Sie den Tetraeder mit einer der offenen Kanten nach oben halten, ist die andere unten. Jede Kante hat ein solches Gegenüber. Insgesamt sind es sechs Kanten. Das kann man am leichter zählen, wenn man den Tetraeder wieder auf eine Seite stellt: Drei Kanten gehen von der Spitze aus, drei weitere sind am unteren Rand.

Ihnen ist sicher der Unterschied zu einer „ägyptischen Pyramide“ aufgefallen. Während diese eine quadratische Grundfläche haben, ist beim Tetraeder jede Seite ein gleichseitiges Dreieck. Der Tetraeder besteht aus vier solchen Dreiecken und ist der Körper mit der geringsten Anzahl von regulären Vielecken als Begrenzung.

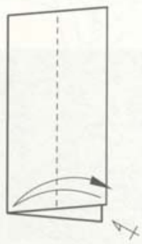
Die Bezeichnung bezieht sich auf die Zahl der Flächen: „tetra“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet „vier“. Die Namen vieler anderer geometrischer Körper sind ebenfalls nach diesem Prinzip entstanden: Hexaeder (Sechsflächner, Würfel), Oktaeder (Achtflächner), Dodekaeder (Zwölfflächner) oder Ikosaeder (Zwanzigflächner) sind Beispiele hierfür.

Sie benötigen **2 Quadrate**, aus denen Sie 2 symmetrische Module anfertigen.

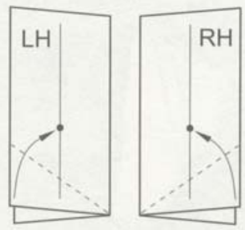
Makes a two-piece tetrahedron using one LH module and one RH module. No lock tab is needed for this model. To make other models use a CO4ET module with lock tabs, fold it from a 2 x 1 rectangle.



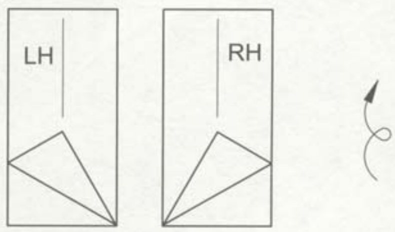
① Fold the left edge to the right edge.



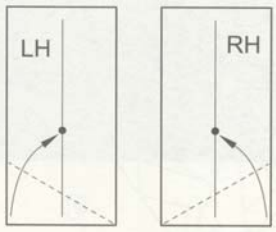
② Fold the top right edge to the left folded edge. Fold the bottom right edge behind to the left folded edge

③


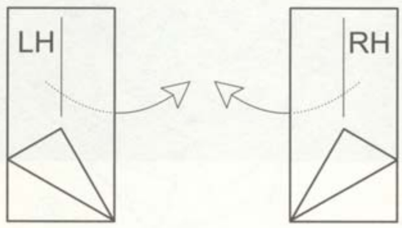
Make a left-hand and right-hand module. Fold the top layer only. At each step the modules are mirror images.

④


Step 3 done. Turn the model over.



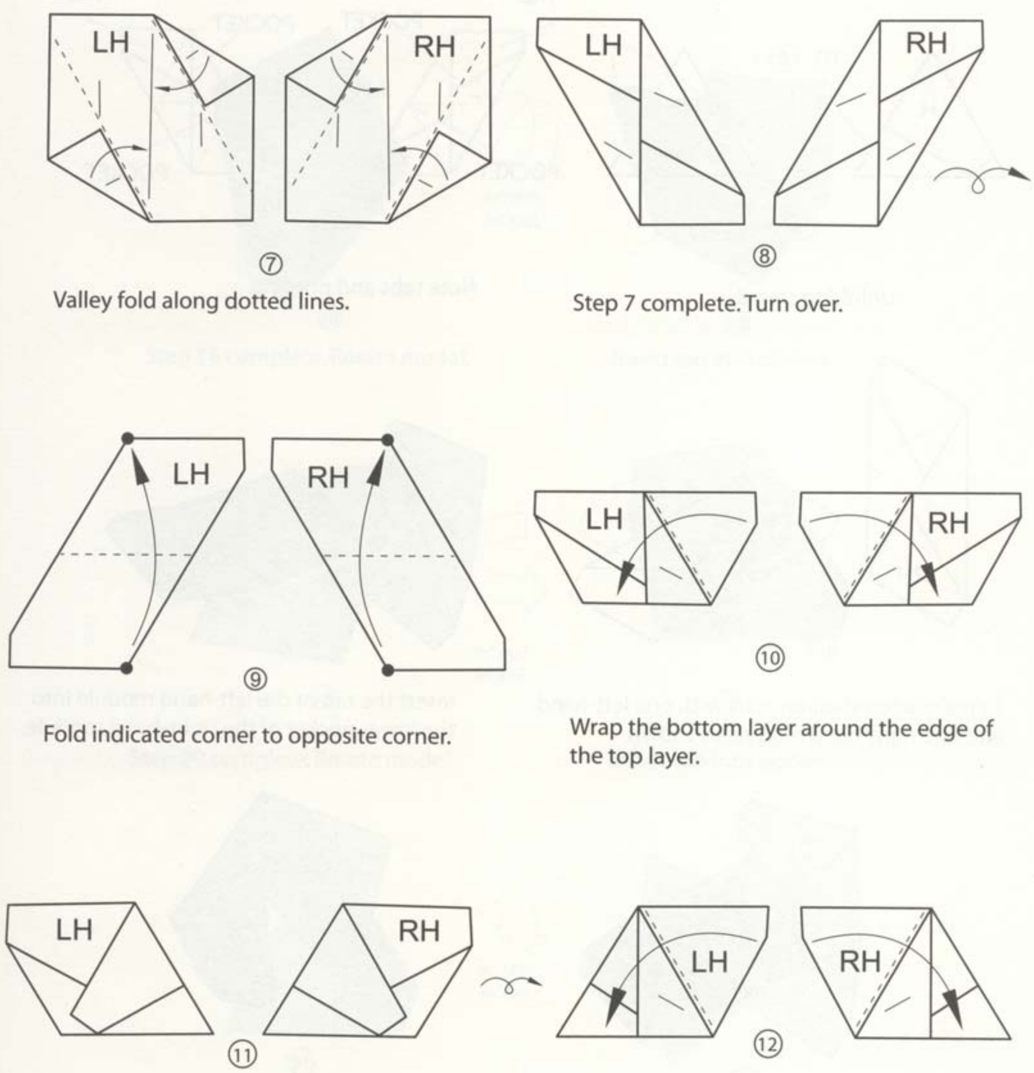
⑤ Crease the top layer only.



⑥ Unfold the bottom layer.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 28 - 31.



Valley fold along dotted lines.

Step 7 complete. Turn over.

Fold indicated corner to opposite corner.

Wrap the bottom layer around the edge of the top layer.

Step 10 complete.

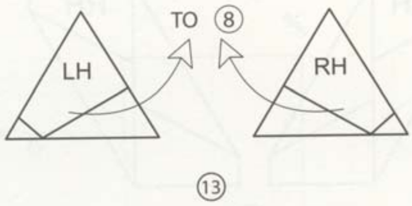
Wrap the bottom layer around the edge of the top layer.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 28 - 31.

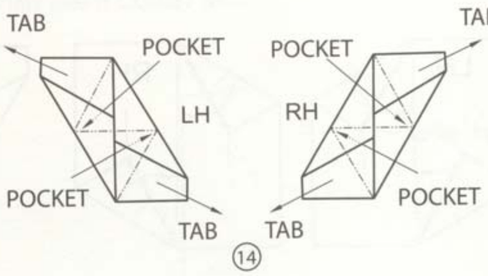
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 28 - 31.



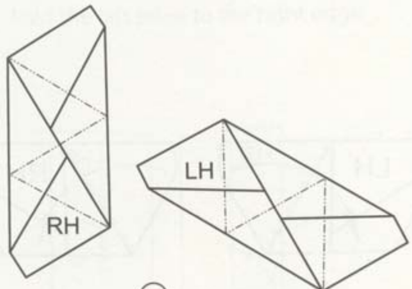
13

Unfold to step 8.



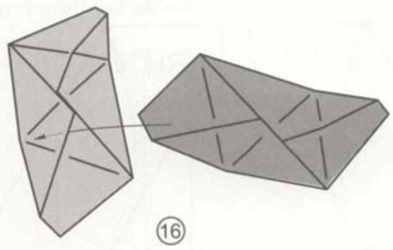
14

Note tabs and pockets.



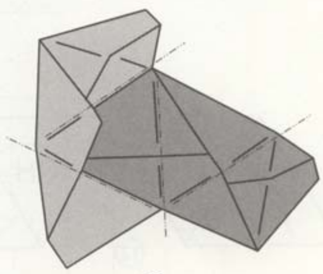
15

To make a tetrahedron start with one left-hand and one right-hand module as shown.



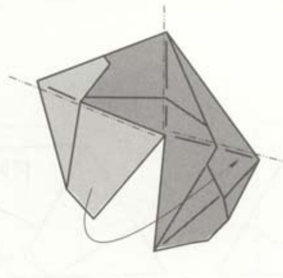
16

Insert the tab of the left-hand module into the lower pocket of the right-hand module.



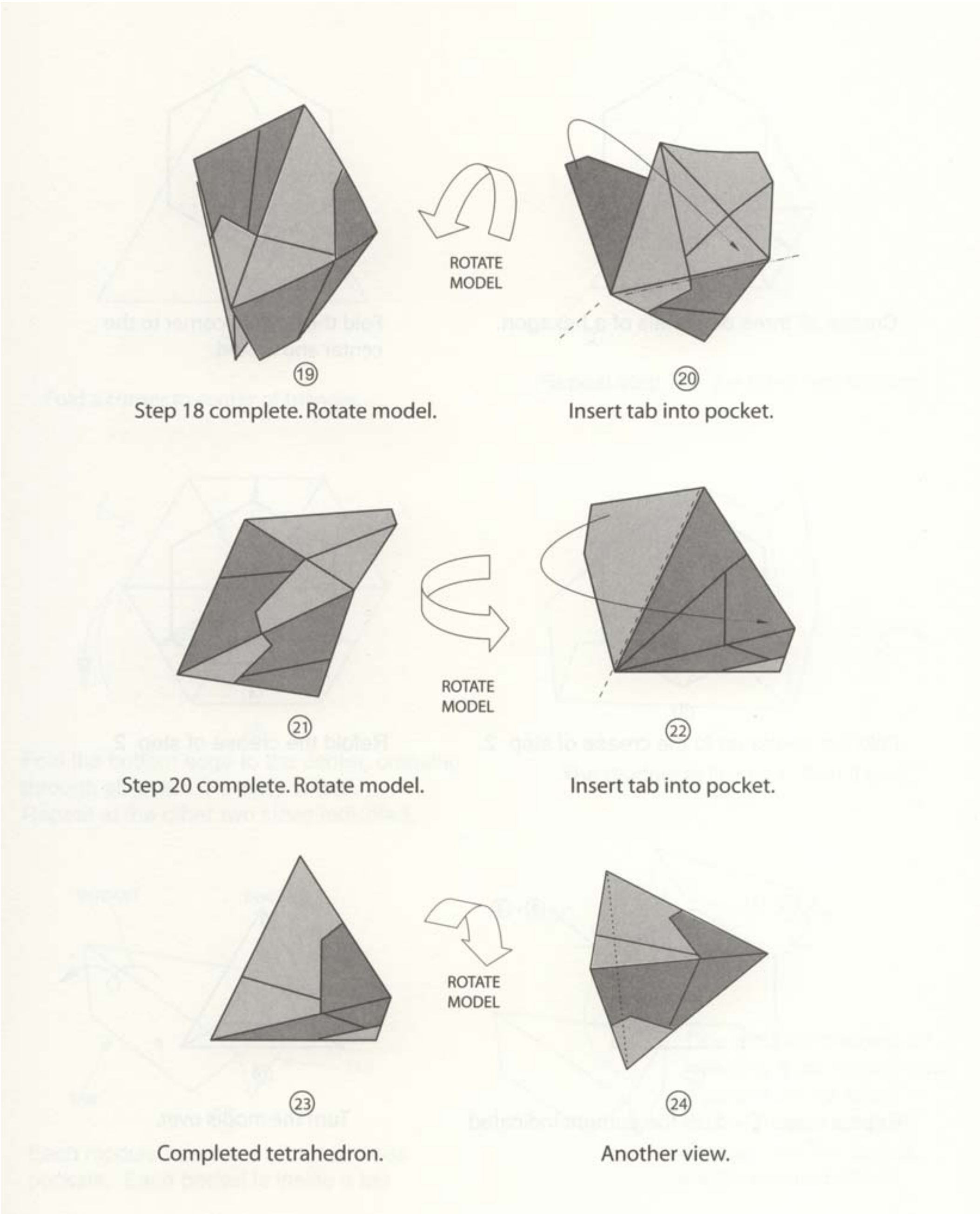
17

Step 16 complete.



18

Wrap the left-hand module towards the right-hand one.



Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 28 - 31.

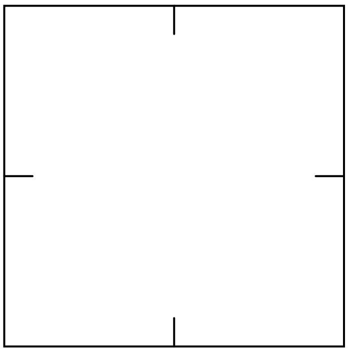
Würfel

Paul Jackson

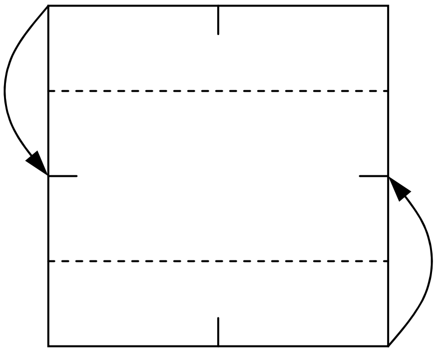
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 14 - 16.

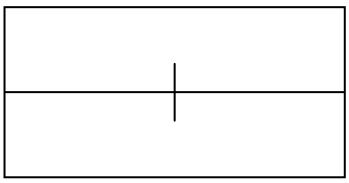
Sie benötigen **6 Quadrate**, aus denen Sie 6 identische Module anfertigen.
*Empfehlung: Verwenden Sie **3 Farben**, je eine für gegenüberliegende Flächen des Würfels.*

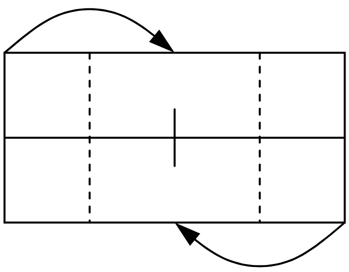


Markieren Sie die vier Seitenmitten.



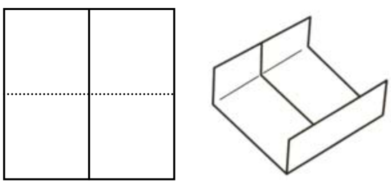
Falten Sie die obere sowie die untere Kante zu den Mittenmarkierungen.





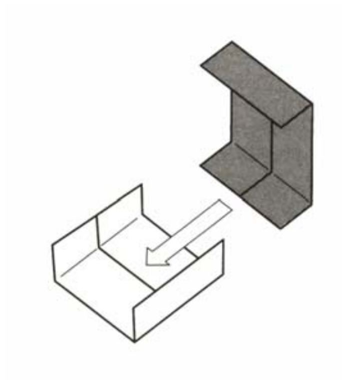
Falten Sie die linke sowie die rechte Kante zu den Mittenmarkierungen und öffnen Sie die soeben geschlossenen „Schranktüren" wieder, sodass sie mit dem Quadrat in der Mitte einen Winkel von 90° einschließen.

Unten liegt jetzt ein Quadrat,
das eine Seitenfläche des Würfels bildet,
die nach oben stehenden Teile sind Laschen.

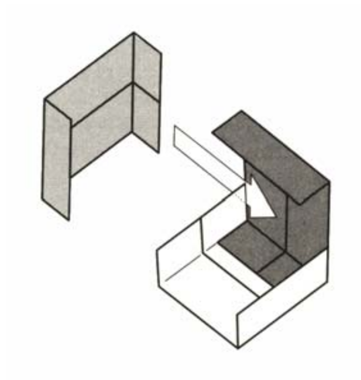


Fertigen Sie 6 identische Module an. Falls Sie sich an die Farbempfehlung gehalten haben stecken Sie die Teile so zusammen, dass gegenüberliegende Würfelflächen gleiche Farbe haben bzw. an jeder Würfelecke (außen wie innen) alle drei Farben zu sehen sind.

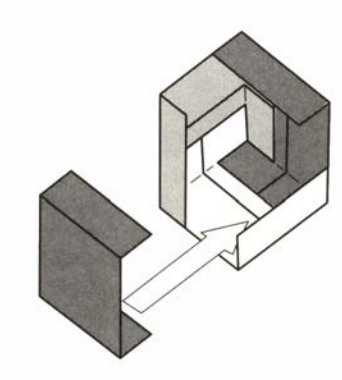
1



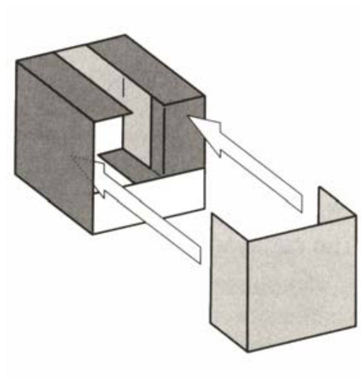
2



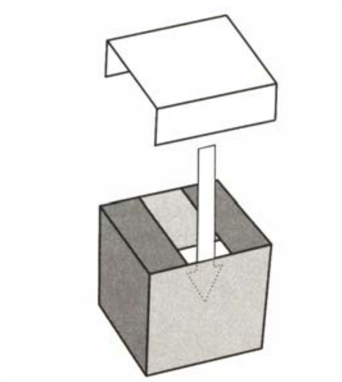
3



4



5



6

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

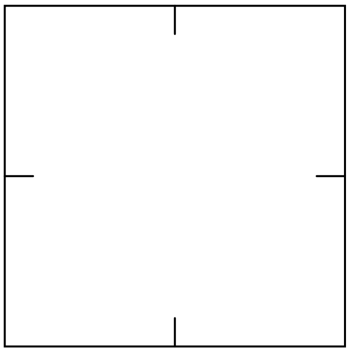
Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 14 - 16.

Würfel mit einspringender Ecke

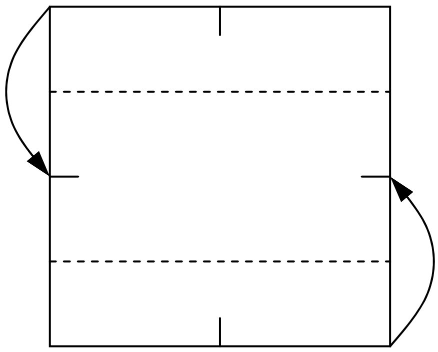
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 14 - 16.

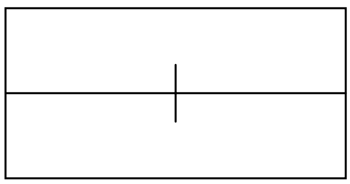
Sie benötigen **6 Quadrate**, aus denen Sie zunächst 6 identische Module wie beim Jackson-Würfel anfertigen. 3 davon bearbeiten Sie weiter.

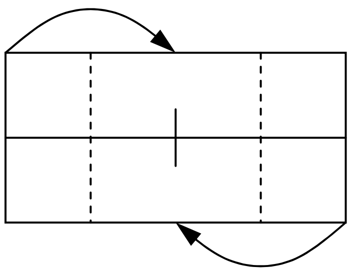


Markieren Sie die vier Seitenmitten.

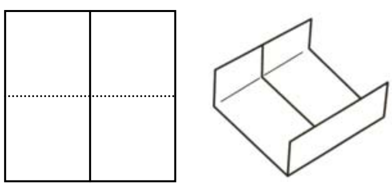


Falten Sie die obere sowie die untere Kante zu den Mittenmarkierungen.





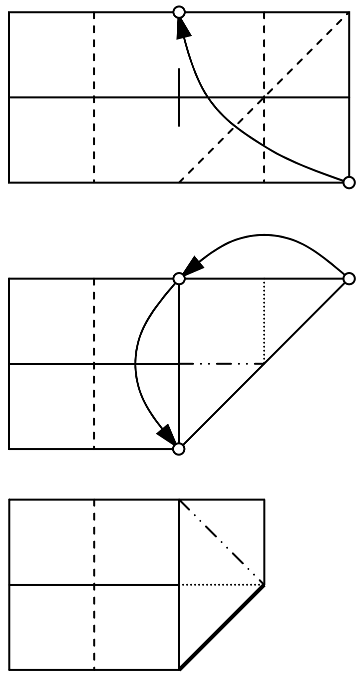
Falten Sie die linke sowie die rechte Kante zu den Mittenmarkierungen und öffnen Sie die soeben geschlossenen „Schranktüren" wieder, sodass sie mit dem Quadrat in der Mitte einen Winkel von 90° einschließen.



Unten liegt jetzt ein Quadrat,
das eine Seitenfläche des Würfels bildet,
die nach oben stehenden Teile sind Laschen.

Würfel mit einspringender Ecke

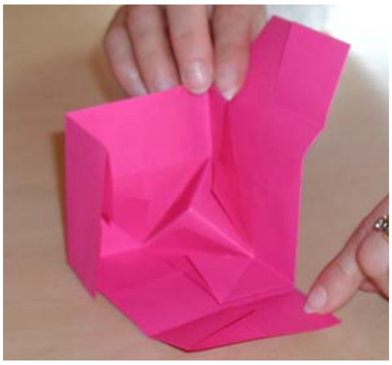
Fertigen Sie 6 identische Module an. 3 davon bearbeiten Sie weiter.

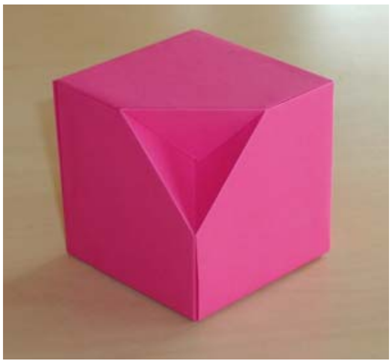


Machen Sie die „Schranktüren“ ganz auf. Falten Sie die rechte untere Ecke zur oberen Seitenmitte. Biegen Sie sie anschließend zur unteren Seitenmitte zurück, wobei Sie gleichzeitig die rechte obere Ecke zur oberen Seitenmitte bewegen und die mittlere Berg- in eine Tal-Falte verwandeln.
Drücken Sie das Papier flach.

Unten in der Mitte liegt wieder ein Quadrat, das eine Seitenfläche des Würfels bildet. Die Seitenteile - auch rechts mit der eingeknickten Ecke - bilden Laschen. Drehen Sie die Laschen nach oben, sodass sie mit dem Quadrat in der Mitte einen Winkel von 90° einschließen.

Fügen Sie die Teile wie beim Jackson-Würfel zusammen.



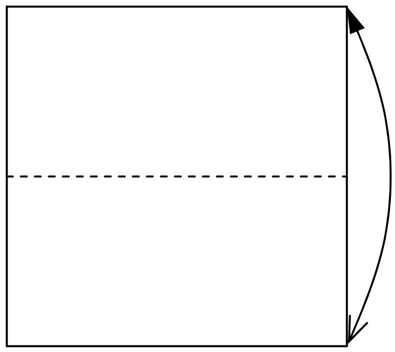


Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

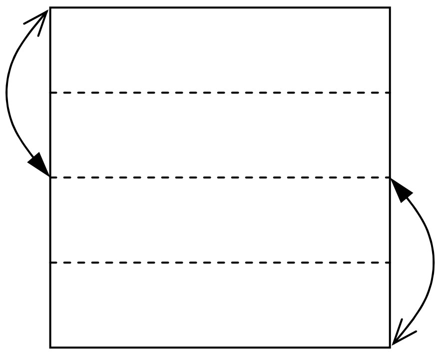
Quelle: Iris **Steiner-Miksche**: Origami und Geometrie. Seminar zur Lehrer/innen-Fortbildung. Klagenfurt, 02.12.2004.

Würfel Mitsunobu Sonobe

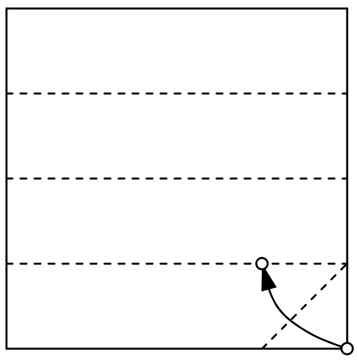
Sie benötigen **6 Quadrate**, aus denen Sie 6 identische Module anfertigen.
*Empfehlung: Verwenden Sie **3 Farben**, je eine für gegenüberliegende Flächen des Würfels.*



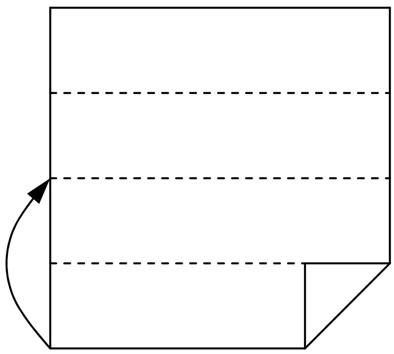
Halbieren Sie das Quadrat über eine Seite und öffnen Sie es wieder.



Falten Sie die obere sowie die untere Kante zur Mitte und wieder zurück.

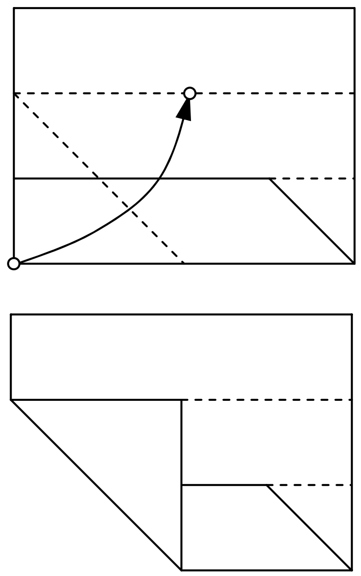


Falten Sie die rechte untere Ecke zur unteren Viertel-Linie und klappen Sie anschließend das untere Viertel um.

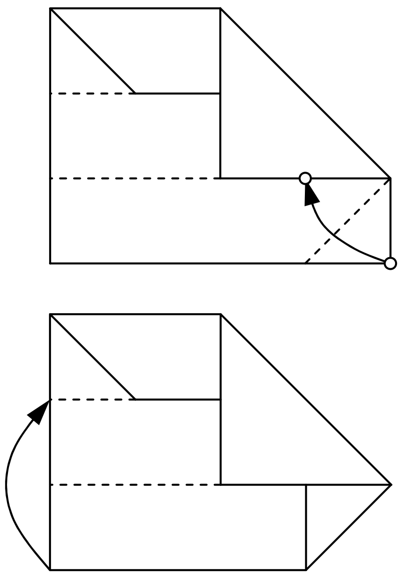


Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

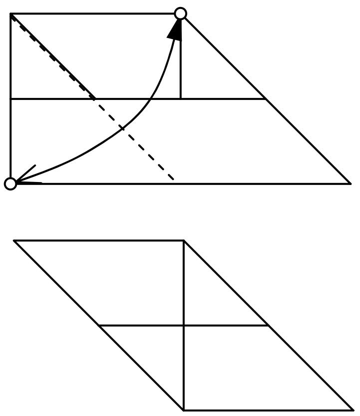
Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 17 - 20.



Falten Sie die linke untere Ecke zur oberen Viertel-Linie.



Drehen sie das Modul um 180°.
Falten Sie die rechte untere Ecke zur unteren Viertel-Linie und klappen Sie anschließend das untere Viertel um.

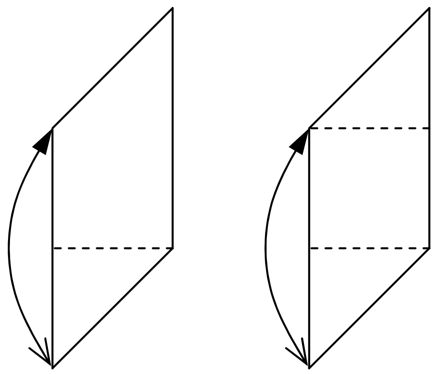


Falten Sie die linke untere Ecke nach oben und wieder zurück.
Wiederholen Sie die Faltung, aber stecken Sie dabei das Dreieck oben „in die Tasche“ (zwischen die Papierlagen).

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 17 - 20.

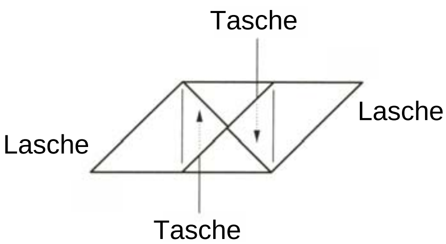
Würfel
Mitsunobu Sonobe



Drehen Sie das Modul um.
Falten Sie die linke untere Ecke nach oben und wieder zurück.

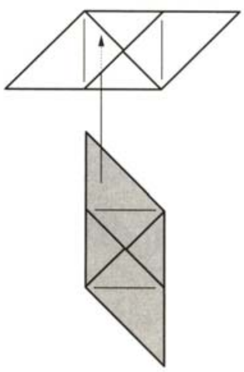
Drehen sie das Modul um 180°.
Falten Sie die linke untere Ecke nach oben und wieder zurück.

Drehen Sie das Modul um.
Das mittlere Quadrat wird eine Seitenfläche des Würfels bilden, die seitlichen Dreiecke sind Laschen.

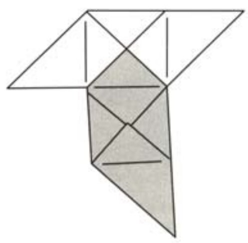


Fertigen Sie 6 identische Module an. Beachten Sie beim Zusammenfügen die Farbreihenfolge: parallele Würfelkanten haben gleiche Farbe.

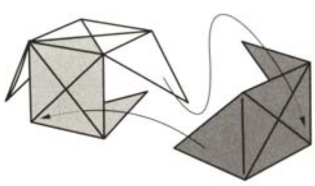
1



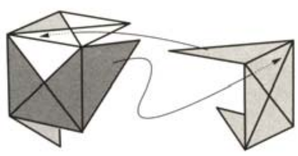
2



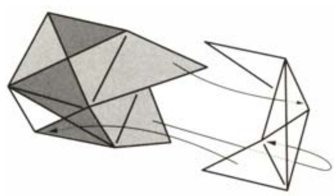
3



4



5



6

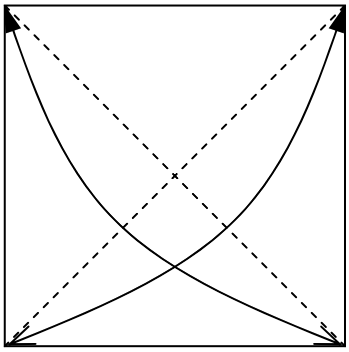
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 17 - 20.

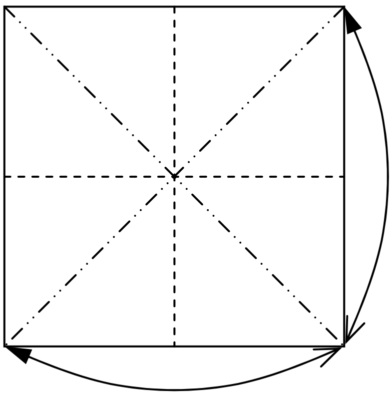
Oktaeder-Skelett

Robert Neale

Sie benötigen **6 Quadrate**, aus denen Sie 6 identische Module anfertigen.
*Empfehlung: Verwenden Sie **3 Farben**, eine pro Diagonalschnitt-Ebene.*

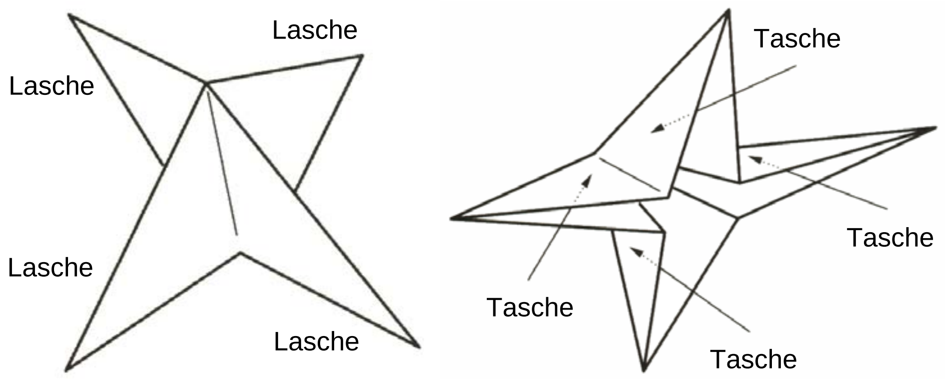


Halbieren Sie das Quadrat über die Diagonalen und öffnen Sie es wieder.



Drehen Sie das Modul um.
Halbieren Sie das Quadrat über die Seiten und öffnen Sie es wieder.

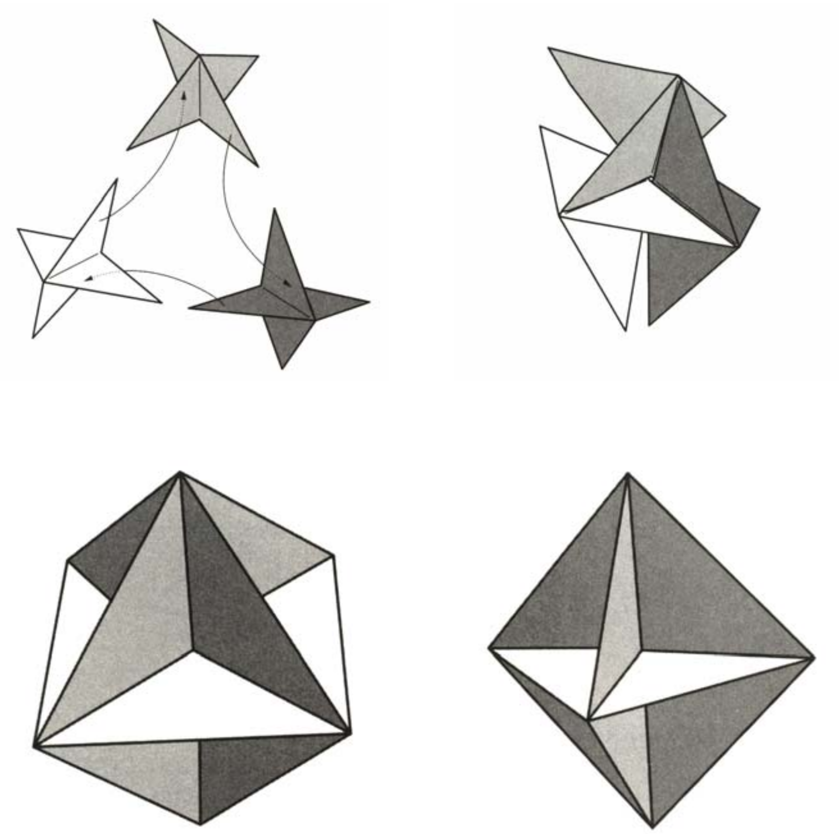
Formen Sie das Quadrat zu einem „Stern". Seine 4 Strahlen bzw. „Hütchen" sind zugleich Laschen und Taschen.



Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 6 - 7 | S 40 - 41.

Fertigen Sie 6 identische Module an. Falls Sie sich an die Farbempfehlung gehalten haben stecken Sie die Teile so zusammen, dass jede Diagonalschnitt-Ebene in einer anderen Farbe zu sehen ist. Dabei werden je zwei gegenüberliegende „Hütchen“ von anderen „Hütchen“ verschluckt.

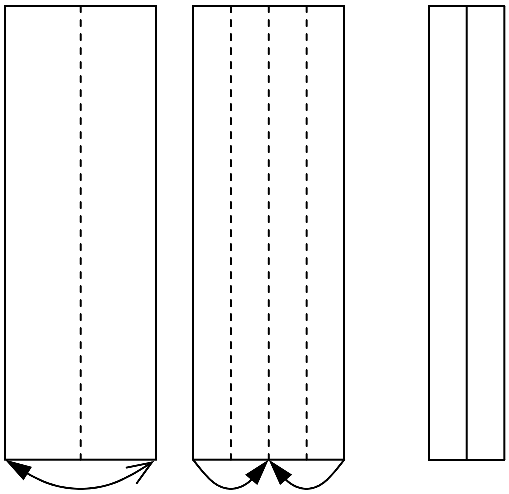


Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>. S 6 - 7 | S 40 - 41.

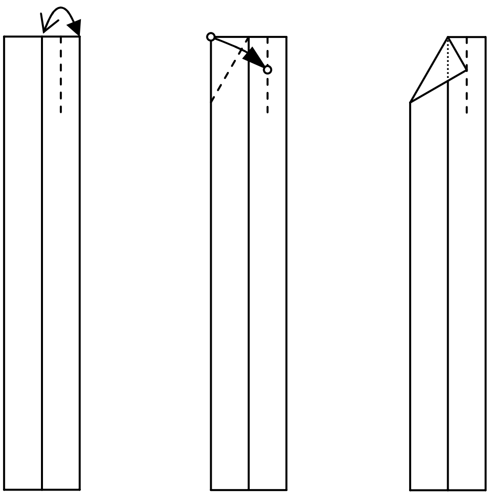
Tetraeder Kantenmodell

Sie benötigen **6 Streifen**, aus denen Sie 6 identische Module anfertigen.
Empfehlung: Verwenden Sie Streifen, deren längere Seite ca. 3 x so lang ist wie die kürzere. Ideal sind also gedrittelte Quadrate, gut geeignet sind auch parallel zur kurzen Seite geviertelte DIN-A4 Blätter.



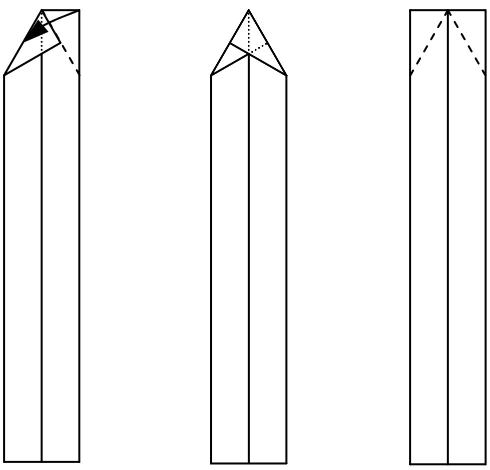
①
Falten Sie den Streifen längs in der Mitte und öffnen Sie ihn wieder.

②
Falten Sie die äußeren Kanten zur Mittellinie. Sie erhalten einen schmalen hohen „Schrank“ mit zwei „Türen“.



③
Markieren Sie die Mitte der rechten „Schranktüre“.

④
Falten Sie die linke obere Ecke so nach innen, dass sie auf der markierten Mittellinie zu liegen kommt und die Faltkante genau durch die Streifenmitte verläuft.

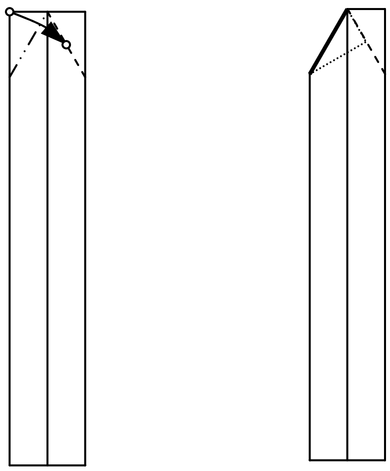


⑤
Falten Sie die rechte obere Ecke so nach innen, dass die Faltkante der kürzeren Kathete des linken Dreiecks entspricht.

⑥
Öffnen Sie die beiden Dreiecksfaltungen.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

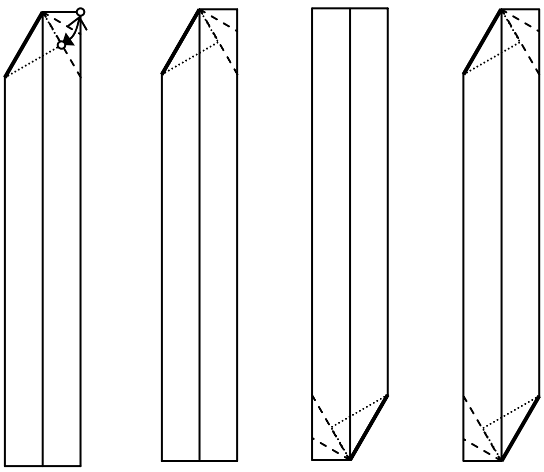
Literatur: Thomas **Hull**: Five Intersecting Tetrahedra. *URL:* http://mars.wnec.edu/~th297133/fit.html (29.12.2009)



⑦

Knicken Sie die linke obere Ecke nach innen (verwandeln Sie die existierende Berg- in eine Tal-Falte).

Das eingeknickte Dreieck ragt über die Mitte; falten Sie daher die Mittellinie nochmals nach.



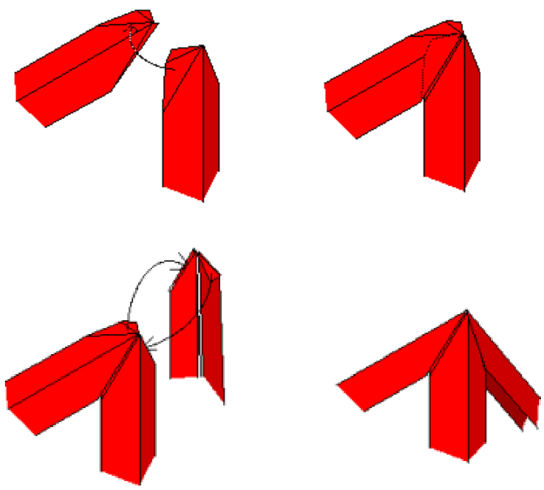
⑧

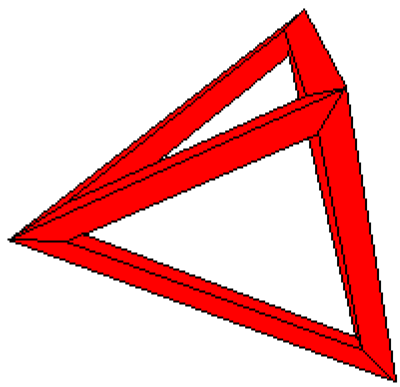
Falten Sie die rechte obere Ecke so nach innen, dass die obere Kante genau auf der schrägen Faltlinie zu liegen kommt und öffnen Sie diese Faltung wieder.
Das linke, nach innen geknickte Dreieck bildet eine Tasche; das rechte geknickte Dreieck bildet eine Lasche, die in die Tasche eines anderen Moduls passt.

⑨

Drehen Sie das Modul um 180° und wiederholen Sie die Schritte ③ bis ⑧.

Fertigen Sie 6 identische Module an und fügen Sie sie zusammen.





Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Thomas **Hull**: Five Intersecting Tetrahedra. *URL:* http://mars.wnec.edu/~th297133/fit.html (29.12.2009)

Literatur & Links

- Albrecht **Beutelspacher**, Marcus **Wagner**: Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere spannende mathematische Experimente. Freiburg, Basel, Wien 2008 <Herder>.
- Jürgen **Flachsmeyer**: Origami und Mathematik. Papier falten - Formen gestalten. Lemgo 2008 <Heldermann>.
- Robert **Geretschläger**: Geometric Origami. Shipley 2008 <Arbelos>.
- Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Beginner's Book of Modular Origami Polyhedra. The Platonic Solids. Mineola, New York 2008 <Dover Publications>.
- Lewis **Simon**, Bennett **Arnstein**, Rona **Gurkewitz**: Modular Origami Polyhedra. Mineola, New York 1999 <Dover Publications>.
- Rona **Gurkewitz**, Bennett **Arnstein**: Multimodular Origami Polyhedra. Archimedians, Buckyballs, and Duality. Mineola, New York 2003 <Dover Publications>.
- Kazuo **Haga**: Origamics. Mathematical Explorations through Paper Folding. Singapore 2008 <World Scientific Publishing>.
- David **Mitchell**: Origami fürs Büro. Lustige Faltideen mit Haftnotizzetteln. Steinerne Furt 2006 <Weltbild>.

- Kristian **Bredies**: Das Falten-und-Schneiden Problem.
  http://www.math.uni-bremen.de/zetem/cms/media.php/250/fold_cut.pdf (23.12.2009)
- Robert **Geretschläger**: Folding the Regular Heptagon.
  http://journals.cms.math.ca/cgi-bin/vault/public/view/CRUXv23n2/body/PDF/page81-88.pdf?file=page81-88 (26.11.2008)
- Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn.
  http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)
- Thomas **Hull**: Five Intersecting Tetrahedra.
  http://mars.wnec.edu/~th297133/fit.html (29.12.2009)
- Jürgen **Köller**: Mathematische Basteleien.
  http://www.mathematische-basteleien.de/ (31.12.2009)
- Robert J. **Lang**: Origami and Geometric Constructions.
  http://www.wiskundemeisjes.nl/wp-content/uploads/2008/02/origami_constructions.pdf (26.11.2008)
- Gabriele **Scharfenberger**: Lösung mathematischer Probleme mit Hilfe von Origami. Dreiteilung des Winkels - Verdopplung des Würfels.
  http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)
- Hans **Walser**: Mathematik für die Sekundarstufe 1. Modul 207: Die fünf platonischen Körper. Lernumgebung.
  http://www.math.tu-dresden.de/~nestler/HS_Geometrie/Vortraege/WinkeldreiteilungZusammenf.pdf (26.11.2008)

- **Doodle** 2.1
  http://doodle.sourceforge.net/ (31.12.2009)

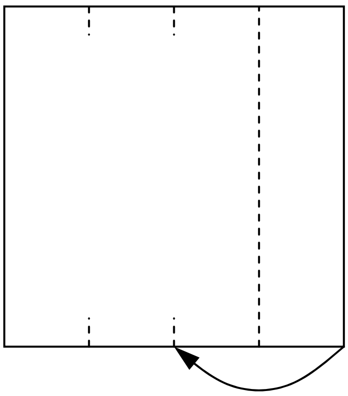
Zugaben

TREFFPUNKT MATHEMATIK

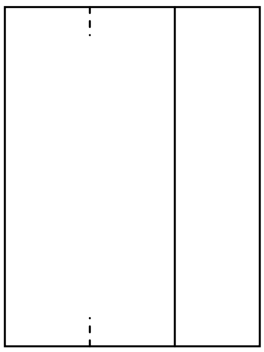
Kontong-Kong

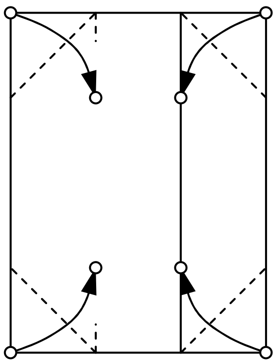
Seiryo Takegawa

Sie benötigen **1 Quadrat**.

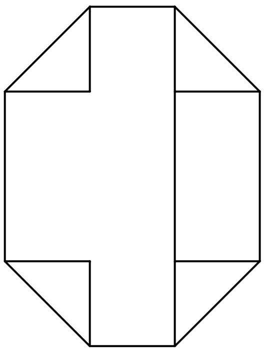


Markieren Sie die Seitenmitten sowie die Mittelpunkte der linken Hälfte gegenüberliegender Quadratseiten und falten Sie die rechte Kante zur Blattmitte.



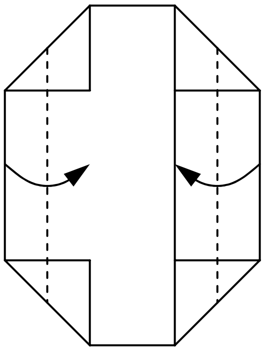


Falten Sie die Ecken unter 45° nach innen.

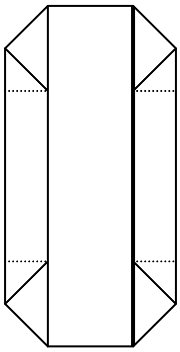


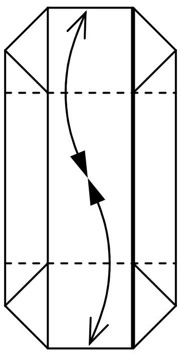
Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Paulo **Mulatinho**: Pfiffiges Origami. Mit Faltanleitungen Schritt für Schritt. Augsburg 1993 (2. Aufl.) <Augustus>. S 10 - 11.



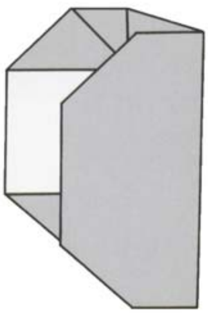
Falten Sie die Außenkanten nach innen.





Falten Sie den oberen sowie den unteren Randteil nach innen und stellen Sie diese Teile anschließend senkrecht.

Stellen Sie das Objekt mit der „schweren“ Kante nach oben und stoßen Sie es an - schon schlägt es einen Purzelbaum …

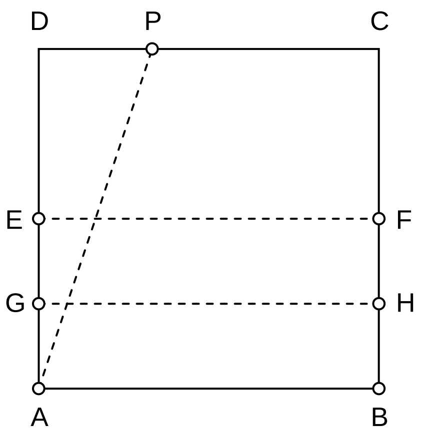


Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Paulo **Mulatinho**: Pfiffiges Origami. Mit Faltanleitungen Schritt für Schritt. Augsburg 1993 (2. Aufl.) <Augustus>. S 10 - 11.

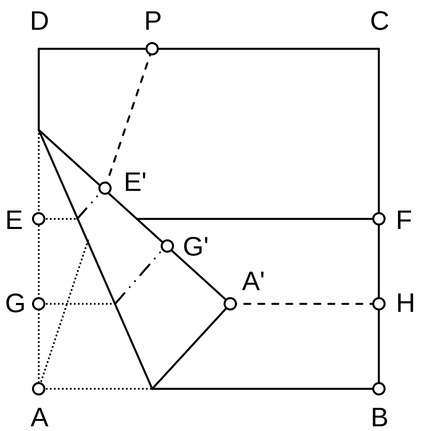
Winkeldrittelung

Sie benötigen ein rechteckiges Blatt Papier (es kann quadratisch sein, muss aber nicht).

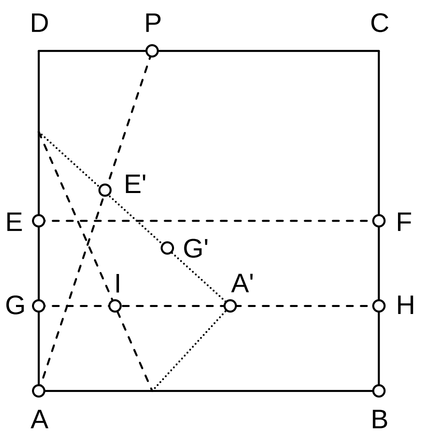


Ein Winkel α sei gegeben als $\angle PAB$.
AP kann als Faltkante oder auch als Linie gegeben sein.

①
Falten Sie die Blattmitte EF sowie die untere Mittenparallele GH.



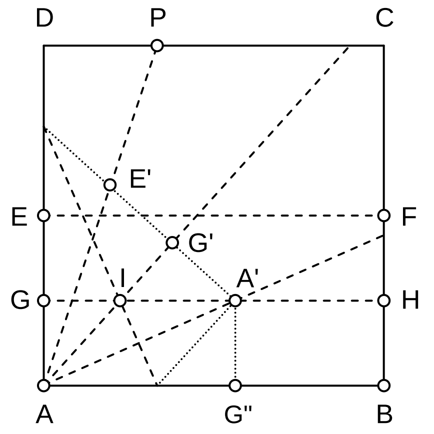
②
Falten Sie A so nach innen, dass gleichzeitig A auf GH und E auf AP zu liegen kommt.



Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)

Winkeldrittelung



③
Falten Sie B so nach innen,
dass AB auf AI zu liegen kommt.

④
Falten Sie anschließend eine Linie durch AI.

Behauptung:
AI und AA' dritteln den Winkel $\alpha = \angle PAB$.

Beweis:

Durch Faltung ② kommt AE auf A'E' zu liegen. Der Mittelpunkt G von AE wird dabei zum Mittelpunkt G' von A'E'.

Durch Faltung ② kommen IA auf IA' und IG auf IG' zu liegen, insgesamt also A'G auf AG'. Da A'G und AE einen rechten Winkel einschließen, steht auch AG' normal auf A'E'.

⇒ AG' ist - als Normale durch den Mittelpunkt - Streckensymmetrale von A'E'. Anders gesehen: A'E' ist die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks mit der Spitze A, ihre Streckensymmetrale ist daher zugleich auch Winkelsymmetrale.

⇒ $\angle PAI = \angle IAA'$

Die Faltlinie von Faltung ③ ist Winkelsymmetrale des Winkels $\angle IAB$. Sie verläuft durch A', da A' gleiche Normalabstände von AI und AB hat: A'G' = AG = A'G''.

⇒ $\angle IAA' = \angle AA'B$

⇒ $\angle PAI = \angle IAA' = \angle AA'B$ □

Hinweis:

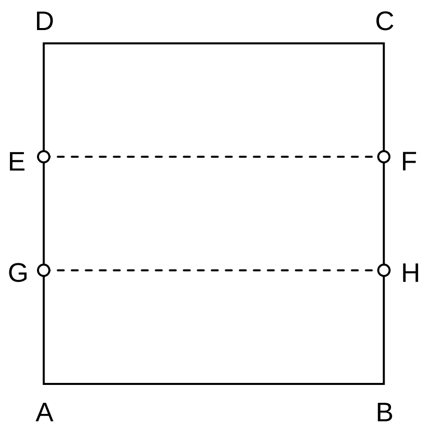
Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels nur mit Hilfe von **Zirkel** und **Lineal** in **endlich** vielen Schritten ist *nicht* möglich.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)

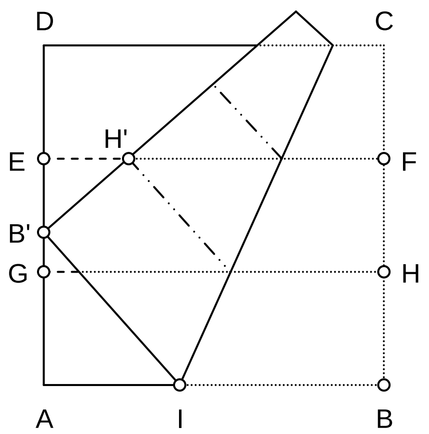
Würfelverdoppelung

Sie benötigen ein quadratisches Blatt Papier.



①

Dritteln Sie das Blatt - etwa mit Hilfe der Methode von Haga (siehe „Die erste Falte“) - durch die Faltlinien EF und GH.



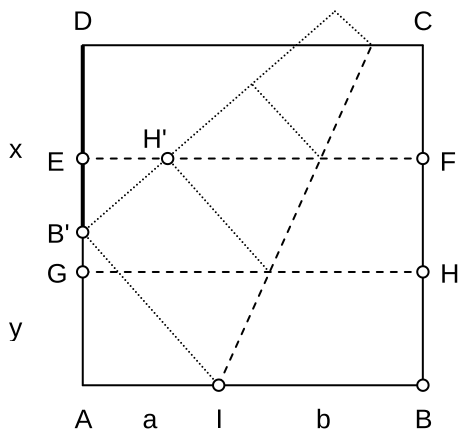
②

Falten Sie B so nach innen, dass gleichzeitig B auf AD und H auf EF zu liegen kommt.

x := DB' a := AI

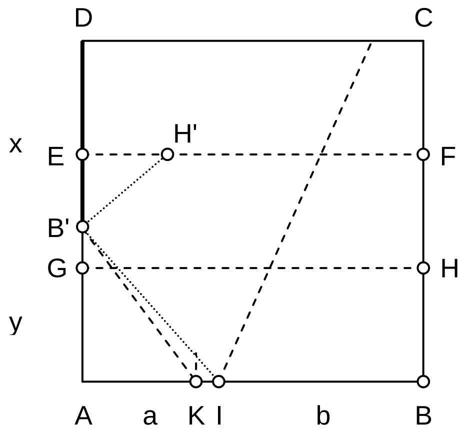
y := B'A b := IB = IB'

Behauptung 1: $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$

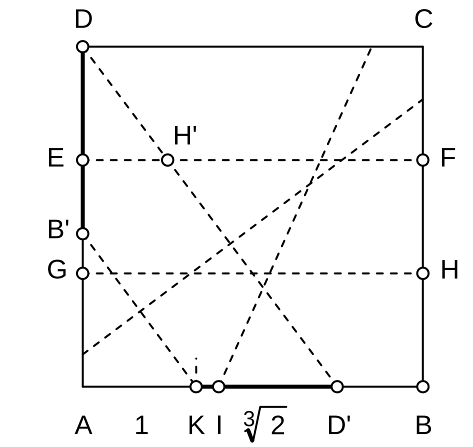


Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)



③
Markieren Sie ein Drittel der unteren Quadratseite AB und verbinden Sie diesen Drittelpunkt K mit B' durch eine Faltlinie.



④
Falten Sie die Streckensymmetrale von KB' und spiegeln Sie anschließend D an dieser Symmetralen.

Sei AB = 3 $\Rightarrow$ AK = 1

Behauptung 2: $KD' = \sqrt[3]{2}$

Beweis:

Es ist $x + y = a + b = 3$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔAIB' ~ ΔEB'H' und wegen B'H' = BH = 1 gilt: $\frac{a}{b} = \frac{x-1}{1}$

$$\Rightarrow \quad a = (x-1)\cdot b = 3 - b\,, \quad b \cdot x = 3\,, \quad \underline{b = \frac{3}{x}}\,; \quad \underline{a = \frac{3\cdot(x-1)}{x}}$$

$$\Delta AIB':\ b^2 = a^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{x^2} = \frac{9\cdot(x-1)^2}{x^2} + (3-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(x^3 - 6x^2 + 18x - 18) = 0$$

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 18x - 18 = 0 \ \mid \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0 \ \mid -2x^3 + 18x^2 - 54x + 54$$

$$\Rightarrow \quad x^3 = -2x^3 + 18x^2 - 54x + 54 = 2\cdot(27 - 27x + 9x^2 - x^3) = 2\cdot(3-x)^3 = 2y^3 \ \mid : y^3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^3}{y^3} = 2\,, \quad \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔAD'D ~ ΔAKB' gilt: $KD' = \frac{KD'}{AK} = \frac{DB'}{B'A} = \frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$ □

Hinweis:

Die Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ nur mit Hilfe von **Zirkel** und **Lineal** in **endlich** vielen Schritten ist *nicht* möglich.

Mag. Gerhard Hainscho | Mathematik und Origami

Literatur: Hans-Wolfgang **Henn**: Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf (23.12.2009)