Mag. Gerhard Hainscho

Geometrie zum Anfassen

Die Platonischen Körper - bauen, schauen, experimentieren

Treffpunkt Mathematik ist eine Initiative der ARGE Mathematik AHS Kärnten in Zusammenarbeit mit dem Landesschulrat für Kärnten, der Pädagogischen Hochschule Kärnten, dem Regionalen Netzwerk Kärnten und IMST.

Klagenfurt, Juni 2007

Inhalt

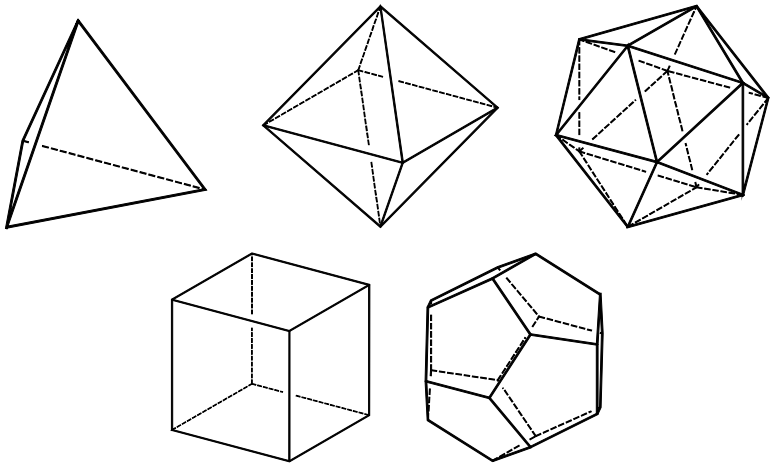
Info ... 1
- Die Platonischen Körper ... 2
  - Platon ... 3
  - Johannes Kepler ... 4
  - Griechische Fremdwörter ... 5
  - Spielwürfel ... 6
  - Natur ... 7
  - Kunst ... 8
- Die Anzahl 5 ... 9
  - Archimedische Körper ... 10
  - Sternformen ... 11
  - Zirkel und Lineal ... 12
- Dualität ... 13
  - Der Eulersche Polyedersatz ... 14

Aufgaben ... 15
  - Körper ... 16
  - Sichtbarkeit ... 17
  - Netze ... 18
  - Färbungen ... 19
  - Bewegungen ... 20
  - Platonische Körper ... 21
  - Winkel ... 22
  - Tetraeder ... 23

Anhang ... 24
  - Literatur ... 25
  - Internet ... 26
  - Bilderquellen ... 28

Info

Die Platonischen Körper



Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder werden als die fünf **Platonischen Körper** oder auch als die fünf **regulären Polyeder** bezeichnet (*Polyeder* ist nur ein anderes Wort für *Körper*).

Sie alle sind in gewisser Hinsicht besonders regelmäßig und symmetrisch. Doch es ist gar nicht so leicht, genau die Eigenschaften zu nennen, durch die sich ein Platonischer Körper von allen anderen unterscheidet! Man muss dazu den Körper selbst, seine Seitenflächen und sogar seine Ecken beschreiben. Eine genaue Erklärung dieser Art nennt man in der Mathematik *Definition*.

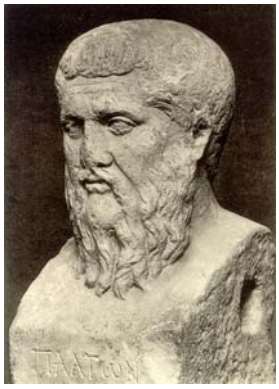
- **Definition:** Ein Körper heißt *Platonischer Körper*, wenn er die folgenden Eigenschaften hat:
  1. **Er ist konvex.**
     Konvex bedeutet „nach außen gewölbt“. Eine Eselsbrücke sagt: „Konvex ist der Buckel von der Hex.“ Die mathematische Erklärung sieht allerdings etwas anders aus:
     Ein Körper heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte in seinem Inneren auch deren Verbindungsstrecke zur Gänze im Inneren des Körpers liegt.
  2. **Alle Seitenflächen des Körpers sind kongruente reguläre konvexe Vielecke.**
     Kongruent bedeutet „deckungsgleich“: kongruente Figuren kann man exakt übereinander legen. Sie haben gleiche Gestalt und gleichen Flächeninhalt.

     Ein Vieleck heißt *regulär*, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle seine Innenwinkel gleich groß sind.

     Ein Vieleck heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte in seinem Inneren auch deren Verbindungsstrecke zur Gänze im Inneren des Vielecks liegt.
  3. **In jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen zusammen.**
     Die Idee ist: Jede Ecke sieht gleich aus. Es gehen auch von jeder Ecke gleich viele Kanten aus und alle solche „Kantenfiguren“ sind kongruent.

Jeder Platonische Körper besitzt eine Umkugel, eine Inkugel und dazwischen eine dritte Kugel, die durch alle Kantenmittelpunkte geht. Diese Kugeln sind *konzentrisch*, d.h. sie haben einen gemeinsamen Mittelpunkt. Der gemeinsame Mittelpunkt ist zugleich Körpermittelpunkt und Symmetriezentrum des jeweiligen Körpers.

Platon



Woher kommt der Name *Platonische Körper* und wer war *Platon*?

Sokrates, Platon und Aristoteles sind die wohl berühmtesten Philosophen der griechischen Antike. Platon war ein Schüler des Sokrates und lebte im 4. Jh. v. Chr. Sein Geburtsjahr - um 430 v. Chr. - ist nicht genau bekannt. Er stammte aus einer Athener Adelsfamilie - und hieß eigentlich *Aristokles*, wurde aber aufgrund seiner breiten Stirn *Platon* genannt; *platós* ist das griechische Wort für breit.

Platon war sehr an Mathematik interessiert. In seiner Heimatstadt Athen gründete er 387 v. Chr. eine Schule, die bis 529 n. Chr., d.h. länger als 900 Jahre bestand! Sie grenzte an ein Wäldchen, das dem griechischen Helden *Akademos* gewidmet war - einem der ganz wenigen Helden, die dadurch berühmt wurden, dass sie einen Krieg *verhinderten*, in diesem Fall einen Krieg der Spartaner gegen die Athener. Wegen ihrer Lage wurde die Schule die *Platonische Akademie* genannt - ein Name, der bis heute für höhere Schulen verwendet wird. Über ihrem Eingang soll der Spruch

Αγεωμετρητοζ μηδειζ εισιτω

gestanden haben - *Ageometretos medeis eisito* heißt wörtlich: Dem Ungeometrisierten ist kein Eingang; nur an Geometrie und Mathematik Interessierte waren also willkommen.

Von Platon sind viele Bücher erhalten - alle in Dialogform geschrieben, wobei stets Sokrates als einer der Gesprächspartner auftritt. In *Timaios*, einem dieser Bücher, das nach einem Anhänger des *Pythagoras* benannt ist, beschreibt er alle regulären Polyeder - daher werden sie auch die Platonischen Körper genannt, obwohl sie Platon keineswegs „erfunden“ oder mathematisch näher untersucht hat. Er beschreibt vielmehr die Idee, dass Materie aus kleinsten, unteilbaren Teilchen besteht, den so genannten *Atomen*. Die alten Griechen kannten *vier Elemente* und glaubten, deren Atome hätten gerade die Form der Platonischen Körper:

Feuer - Tetraeder
Luft - Oktaeder
Wasser - Ikosaeder
Erde - Hexaeder

Dumm, dass es noch einen fünften Körper aber keine *Quintessenz*, kein fünftes Element gab! Das Dodekaeder wurde daher dem „Weltganzen“ zugeordnet, d.h. als die Form des Kosmos gesehen.

Übrigens: *Timaios* und *Kritias* sind die beiden Bücher, in denen Platon über *Atlantis* berichtet.

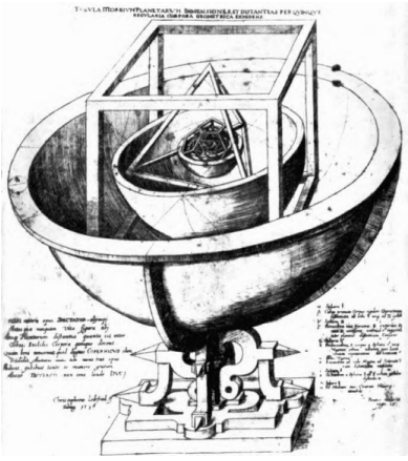
Johannes Kepler

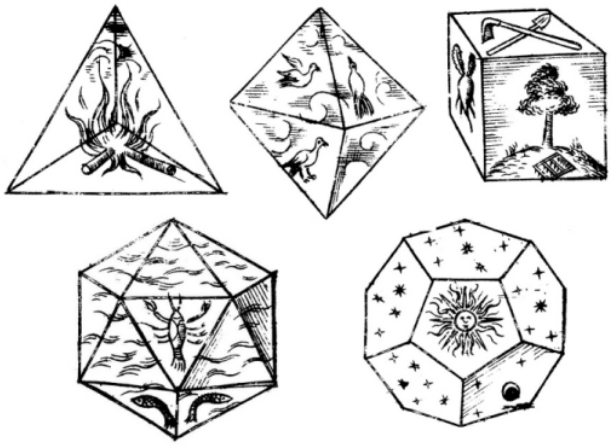
Johannes Kepler (1571 - 1630) studierte Theologie und beschäftigte sich mit Astronomie und Mathematik. Er unterrichtete einige Jahre in Graz, ging dann nach Prag und löste angeblich anlässlich seiner zweiten Hochzeit in Linz das Problem, möglichst genau das Volumen von Weinfässern zu bestimmen - die so gefundene *Keplersche Fassregel* zur Volumsbestimmung von Rotationskörpern kennt man noch heute.

Seine wohl größte Leistung in der Astronomie war die Formulierung der drei *Keplerschen Gesetze*, die die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne beschreiben:

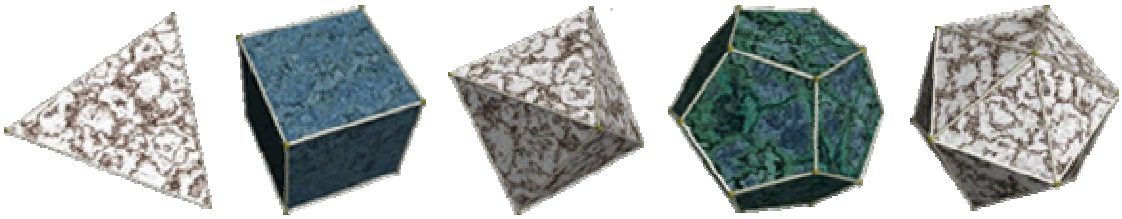
- Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
- Der von der Sonne zu einem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.

Früher glaubte Kepler allerdings, die Umlaufbahnen der Planeten wären Kreise auf gedachten Kugeln, deren Abstände zueinander durch die Platonischen Körper bestimmt werden könnten. In seinem Buch *Mysterium Cosmographicum* (1596) ist das entsprechende Modell enthalten. Eine andere Illustration dieses Buches zeigt die Zuordnung der Platonischen Körper zu den griechischen Elementen - und wohl auch, wie sehr Keplers Denken damals der Tradition der Antike nahe stand.





Griechische Fremdwörter



Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und *Ikosaeder* - alle Namen der Platonischen Körper kommen aus dem Griechischen. Auch das Wort *Polyeder* für Körper ist griechisch.

Der erste Teil der Namens gibt jeweils die Anzahl der *Flächen* an:

- tettares / τετταρεζ = vier
- hex / εξ = sechs
- octo / οκτω = acht
- dodeka / δωδεκα = zwölf
- eikosi / εικοσι = zwanzig
- poly / πολυζ = viel

Die Endung auf -eder kommt vom griechischen Wort hedra / εδρα und bedeutet Sitz - ein Körper kann auf jeder seiner Flächen sitzen. Dieselbe Endung findet man z.B. auch in *Katheder* (ein Stuhl zum Sitzen) oder in *Kathedrale* (eine Kirche am Amtssitz eines Bischofs).

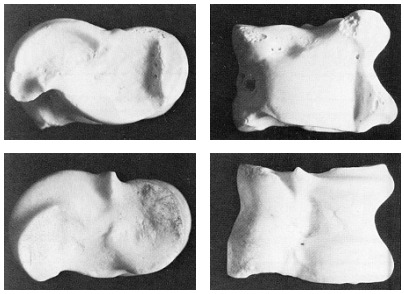
Im Deutschen sagt man *das* Tetraeder, *das* Oktaeder usw. Nur *das* Hexaeder hat als *der* Würfel einen eigenen deutschen Namen. Manchmal hört man dafür auch die lateinische Bezeichnung *cubus*, die man in unserem *Kubik* (Kubikmeter, Kubikwurzel, kubische Gleichungen, …) wieder findet.

Übrigens: Griechische Wurzeln findet man auch in den englischen Bezeichnungen der Platonischen Körper:

- Tetraeder = tetrahedron
- Hexaeder = hexahedron
- Oktaeder = octahedron
- Dodekaeder = dodecahedron
- Ikosaeder = icosahedron
- Platonische Körper = Platonic solids

Auch im Englischen hat nur der Würfel noch einen eigenen Namen - oder sogar zwei, denn man unterscheidet streng zwischen *cube*, dem Würfel als geometrischen Körper und *dice*, den Spielwürfeln.

Spielwürfel



Würfeln ist vielleicht das älteste Glücksspiel der Welt. Allerdings verwendete man in frühester Zeit keine Würfel, wie wir sie heute kennen, sondern z.B. *Würfelknochen* aus den Sprunggelenken von Schafen, Ziegen oder Rindern, die *Astragale*. Diese „Würfel“ konnten nur in vier Positionen zum Liegen kommen; die meisten Punkte brachte wohl der Wurf, der am seltensten eintrat.

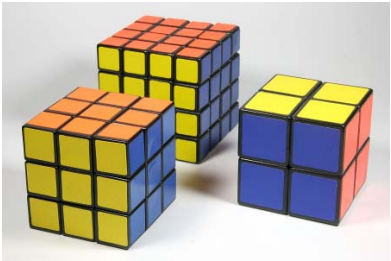
Die ältesten Würfel, die wir kennen, wurden bei einem Spiel in *Ur* gefunden, einer Stadt in Mesopotamien - sie haben die Form von Tetraedern. In Indien wurde mit *Kauri-Schnecken* gewürfelt; man zählte einfach, wie viele Öffnungen nach oben zeigten. Die Azteken warfen markierte Bohnen, im alten Ägypten benutzte man Wurfstäbe. Erst von den Römern weiß man, dass sie auch kubische Würfel besaßen. Sie wurden *tali* oder *tesselae* genannt. Auch Kreisel werden schon lange als „Würfel“ verwendet.

Man sieht: Würfel müssen nicht unbedingt Würfel sein … „Würfel“ meint beim Glücksspiel nicht die geometrische Form, sondern den Zweck - ein Würfel ist einfach ein Gerät zur Erzeugung von *Zufallszahlen*. Auch geworfene Münzen, Lotto-Kugeln sowie Rad und Kugel beim Roulette sind solche Geräte.

Übrigens: *Computer* können nur *Pseudo-Zufallszahlen* erzeugen, denn alle Zahlen, die ein Computer liefert, werden nach mathematischen Formeln berechnet.

Aufgrund ihrer Symmetrie eignen sich insbesondere auch die Platonischen Körper als „Würfel“. Generell achtet man heute sehr auf Symmetrie, jeder Wurf wird dadurch gleich wahrscheinlich. Casino-Würfel sind meist transparent; man soll sehen, dass sie keine Einschlüsse enthalten, die die Gewichtsverteilung beeinflussen könnten.
Bei Würfeln ist es heute üblich, dass die Summe der Punkte auf gegenüber liegenden Flächen immer 7 ergibt.

Es gibt aber noch viele andere „Spielwürfel“ …



Rubik-Würfel

Soma-Würfel

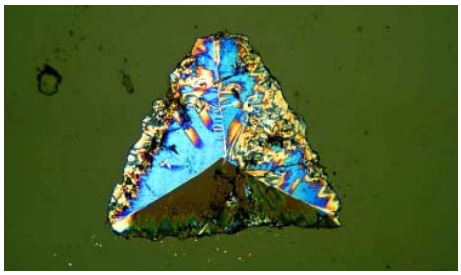
Sudoku-Würfel

Ei-Former

Natur

Die Platonischen Körper findet man sowohl bei anorganischen Stoffen als auch bei Lebewesen. Hier sollen nur einige Beispiele gezeigt werden.

Fast jede bekannte Substanz kann Kristalle bilden - Diamanten ebenso wie z.B. Zucker oder Nierensteine. Die äußere Form eines Kristalls ist der sichtbare Ausdruck seiner inneren Struktur. Moleküle, Atome und Ionen ordnen sich unter günstigen Bedingungen zu regelmäßigen Raumgittern und bilden dadurch symmetrische Kristalle. Bis heute glauben viele Menschen, Kristalle brächten ihren Besitzern Glück und Gesundheit.



Boracit ($Mg_{13}B_7O_{13}Cl$)

Magnetit, Magneteisenstein (Fe_3O_4)

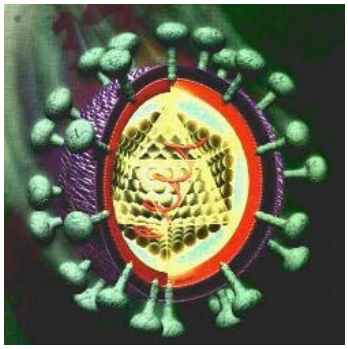
Ein magnetisches Mineral. Sein Vorkommen hilft Tieren - z.B. Bienen - bei der Orientierung im Erdmagnetfeld.

Cobaltit (CoAsS)

Pyrit, Schwefelkies, Katzengold (FeS_2)

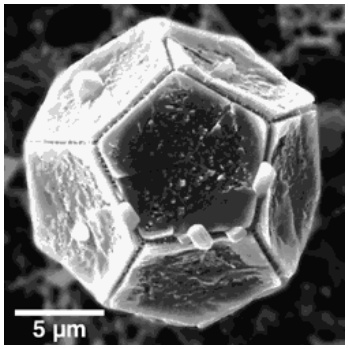
Pyrit kommt vom griechischen πυρ = Feuer: abgeschlagene Pyrit-Splitter erzeugen Funken. *Katzen*gold kommt übrigens von *Ketzer*.

Mit Teleskopen blicken wir in die Vergangenheit, Mikroskope zeigen das Unsichtbare …



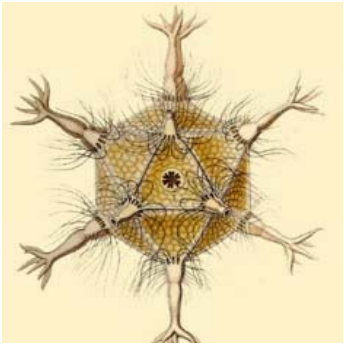
Hepatitis C Virus

Das lateinische Wort *virus* bedeutet Schleim, Saft oder Gift. **Viren** sind Grenzgänger zwischen lebendiger und nicht lebendiger Natur - ohne Wirte können sie sich nicht vermehren. *Hepatitis* bezeichnet eine Entzündung der Leber.



Braarudosphaera bigelowi

Ein Großteil der Biomasse unserer Erde sind mikroskopisch kleine **Algen**. Sie leisten einen wichtigen Beitrag zur Selbstreinigung von Gewässern und dienen vielen Tieren als Nahrungsquelle. *µm* steht übrigens für Mikrometer (0,001 mm).



Circogonia icosahedra

Strahlentierchen oder *Radiolarien* sind Einzeller. Ihre Strahlenfortsätze oder *Axopodien* werden für das Schweben im Meerwasser benötigt und dienen zur Nahrungsaufnahme. Radiolarien besitzen ein „kieseliges“ Innenskelett aus Siliziumdioxid.

Kunst

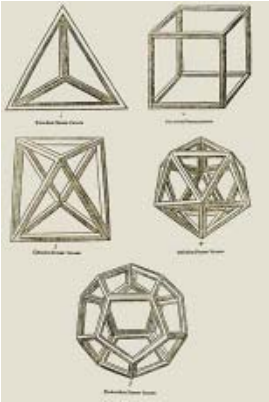
Die Platonischen Körper findet man auch in den Werken bekannter Künstler. Hier sollen nur einige Beispiele gezeigt werden.

Nicht erst seit Dan Browns Bestseller *Sakrileg* (englisch: *The Da Vinci Code*; 2006 verfilmt mit Tom Hanks, Jean Reno und Audrey Tautou) ist *Das letzte Abendmahl* eines der bekanntesten Werke **Leonardo da Vincis**. Es befindet sich im Speisesaal des Mailänder Klosters Santa Maria della Grazie. Leonardo da Vinci (1452 - 1519) ist wohl der bekannteste Künstler und Erfinder der Renaissance, von ihm stammen auch die *Mona Lisa* (italienisch: *La Gioconda*; Original im Louvre, Paris) sowie die Proportionsstudie des *Vitruvianischen Menschen*, das Motiv der italienischen 1-Euro-Münze (Original in der Galleria dell'Accademia, Venedig). Leonardos Abendmahl enthält keine besonderen Anspielungen auf Platonische Körper, wohl aber die an Leonardo angelehnte Abendmahl-Version von **Salvador Dalí** (1904 - 1989; Original in der National Gallery of Art, Washington D.C.). Dalí sympathisierte sehr mit den Ideen des Surrealismus, der spanische Exzentriker sagte sogar von sich selbst: Der einzige Unterschied zwischen mir und den anderen Surrealisten ist der, dass ich Surrealist bin.

Leonardo da Vinci: Das letzte Abendmahl

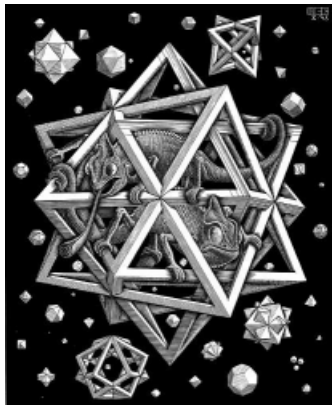
Salvador Dalí: Das letzte Abendmahl

Zurück zu Leonardo. Er schuf die 60 Illustrationen für ein Buch seines Freundes **Luca Pacioli** (1445 - 1514) mit dem Titel *De divina proportione* (deutsch: Der goldene Schnitt), das 1509 in Venedig erschien. Der Franziskanerpater Pacioli war ein sehr bekannter Mathematiker seiner Zeit. Einige der Bilder zeigen die Platonischen Körper in perspektivischer Darstellung.



Leonardo da Vinci
Illustration aus
De divina proportinone

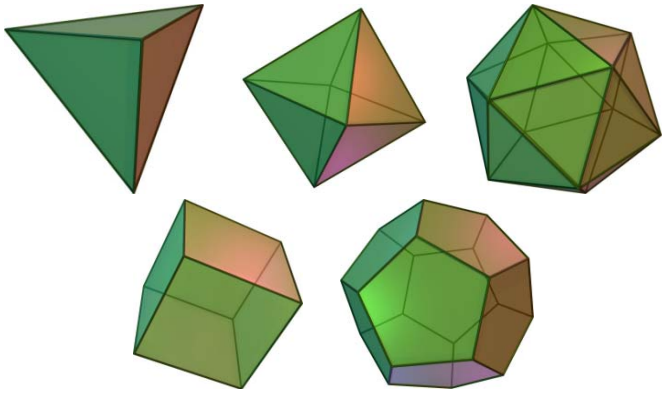
Würfel mit Escher-Motiven
In: Doris Schattschneider, Wallace Walker
M.C. Escher Kaleidozyklen



M. C. Escher
Sterne
Holzstich 1948

Der holländische Grafiker **Maurits Cornelis Escher** (1898 - 1972) schuf viele Werke, die Kunst und Mathematik zugleich sind. Bekannt ist er für seine Parkettierungen, d.h. „Füllungen" der Ebene, für seine Metamorphosen, für die Darstellung unmöglicher Objekte, das Spiel mit den Gesetzen der Wahrnehmung sowie für die kunstvolle Bearbeitung mathematischer Themen.

Die Anzahl 5

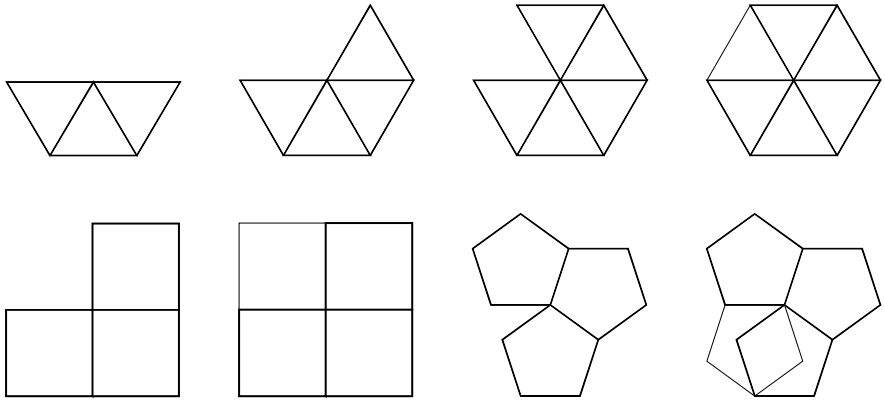


Es gibt unendlich viele reguläre Vielecke - warum gibt es nur fünf reguläre Körper?

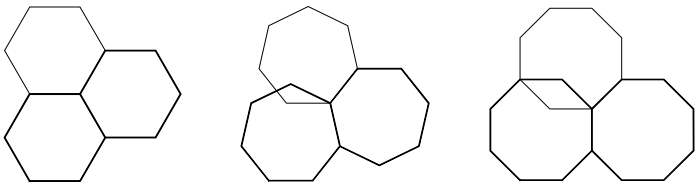
Diese Frage wurde schon in der Antike von *Euklid* (4. Jh. v. Chr.) im 13. Buch seiner *Elemente* beantwortet, dem nach der Bibel meistverkauften Buch aller Zeiten! Seine Überlegung basiert auf zwei Tatsachen:

- Jede Ecke muss aus mindestens drei Flächen gebildet werden.
- Die Summe der Innenwinkel aller Flächen, die in einer Ecke aneinander stoßen, darf nicht größer sein als 360°.

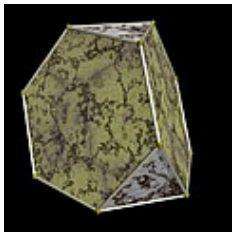
Mit 3 regulären Dreiecken ist das möglich (➢ Tetraeder), ebenso mit 4 Dreiecken (➢ Oktaeder) und mit 5 Dreiecken (➢ Dodekaeder); 6 Dreiecke hingegen bilden bereits ein ebenes Sechseck, woraus sich keine Körperecke mehr formen lässt.

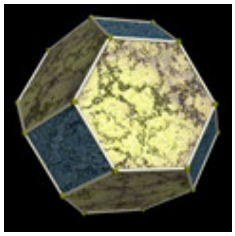


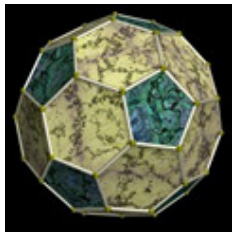
Auch mit 3 Quadraten lässt sich eine Körperecke formen (➢ Hexaeder), während die Summe der Innenwinkel bereits bei 4 Quadraten genau 360° ergibt. Und schließlich lässt sich aus 3 regulären Fünfecken eine Körperecke formen (➢ Dodekaeder), während sich 4 Fünfecke bereits überlappen. Aus regulären Sechsecken, Siebenecken usw. lassen sich keine Körper mehr formen.

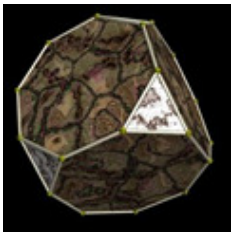


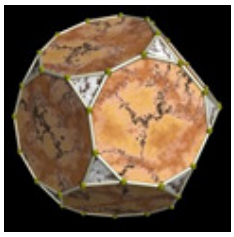
Archimedische Körper

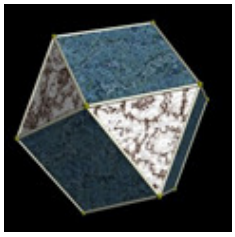

Tetraederstumpf

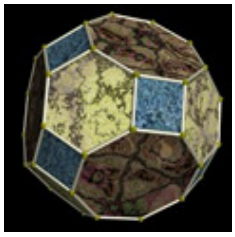

Oktaederstumpf

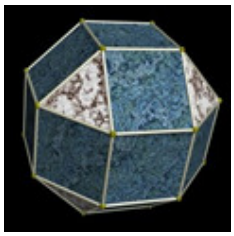

Ikosaederstumpf

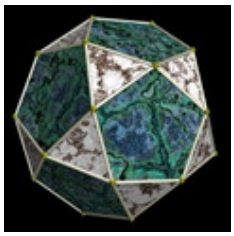

Hexaederstumpf

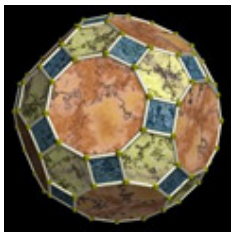

Dodekaederstumpf

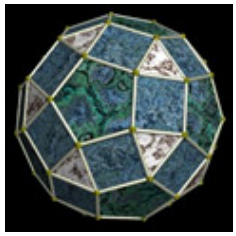

Kuboktaeder

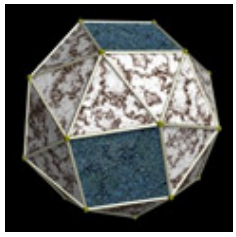

Kuboktaederstumpf

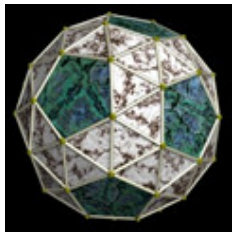

Rhomben-Kuboktaeder


Ikosidodekaeder


Ikosidodekaederstumpf


Rhomben-Ikosidodekaeder


abgeschrägtes Hexaeder


abgeschrägtes Dodekaeder

- **Definition:** Ein Körper heißt *Archimedischer Körper*, wenn gilt:
  1. **Er ist konvex.**
  2. **Alle Seitenflächen des Körpers sind reguläre konvexe Vielecke.**
     Im Vergleich zu den Platonischen Körpern fehlt hier nur das Wort „kongruent“. Man erlaubt also *verschiedene* Arten regulärer Vielecke als Flächen und erhält so eine *Verallgemeinerung* der Platonischen Körper. Jeder Platonische ist auch ein Archimedischer Körper, 13 weitere kommen noch dazu.
  3. **In jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen zusammen.**
     Auch hier gehen von jeder Ecke gleich viele Kanten aus.

Die Archimedischen Körper werden auch **halbreguläre** oder **semireguläre Polyeder** genannt. Sie kommen als Kristallformen in der Natur vor. Benannt sind sie nach **Archimedes** von Syrakus (3. Jh. v. Chr.), der unter anderem das Hebelgesetz, den Auftrieb in Wasser (Heureka!) sowie das Verhältnis der Volumina von Kegel, Zylinder und Kugel entdeckte. Er wurde im zweiten Punischen Krieg getötet, „Störe meine Kreise nicht!“ waren seine letzten Worte.

Sternformen

Die fünf Diagonalen eines regulären Fünfecks bilden eine Figur, die unter verschiedenen Namen bekannt ist: **Pentagramm**, Pentakel, Pentalpha, Sternfünfeck, Drudenfuß und andere. Man kann ein Pentagramm als reguläres Fünfeck betrachten, dabei verzichtet man allerdings auf Konvexität und nimmt in Kauf, dass sich die Seiten nicht nur in den Eckpunkten schneiden. Pentagramme lassen sich in einem Zug zeichnen.

Schon die *Pythagoreer* (5. Jh. v. Chr.) schrieben dem Pentagramm magische Kräfte zu und betrachteten es als Symbol für Gesundheit. Sie verwendeten es als Zeichen der Mitgliedschaft in ihrem Bund - obwohl es gerade das Pentagramm war, das ihr Weltbild veränderte: An dieser Figur erkannten sie, dass das Verhältnis der Diagonale d zur Fünfecksseite a nicht als Bruch dargestellt werden kann, was zur Entdeckung der *irrationalen Zahlen* führte. Es ist

$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482 0\ldots$$

Diese Zahl heißt *goldener Schnitt* und wird meist mit Φ bezeichnet - zu Ehren des Bildhauers *Phidias* (griechisch: Φιδιασ), der unter anderem die Zeus-Statue in Olympia schuf, eines der sieben Weltwunder der Antike. Doch nicht nur Phidias, auch viele andere Künstler sahen - bewusst oder unbewusst - den goldenen Schnitt als mathematischen Aspekt von Schönheit.

Das Wort *Drudenfuß* kommt aus der germanischen Götterwelt. *Trud*, eine Enkelin Odins, beobachtete neugierig - vor allem nachts, in einen dunklen Umhang gehüllt - das Treiben der Menschen durch die Fenster ihrer Häuser. Ihr Gefolge, *Druden* oder *Alben* genannt, brachte dabei den Menschen die *Albträume*. Alben stellte man sich als eine Art von Kobolden oder Dämonen vor, deren Fußabdrücke dem Pentagramm glichen.

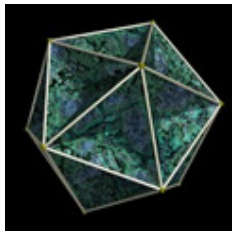
Filme zeigen Pentagramme meist als Symbole von Hexerei und Satanismus. Doch manchmal findet man noch heute Pentagramme, die das Vieh in Ställen vor Krankheit schützen sollen.

Übrigens: Die Sterne auf den Flaggen der USA, EU und anderer Länder sind Pentagramme. Im Gegensatz zu Pentagramm ist *Pentagon* nur ein anderes Wort für Fünfeck, so wie *Polygon* für Vieleck. Bekannt ist vor allem das Pentagon in Arlington (Virginia), Nähe Washington D.C., ein Gebäude mit fünfeckigem Grundriss. Es ist Sitz des US-Verteidigungsministeriums.

Dreidimensional lassen sich aus einander durchdringenden Vielecken vier nichtkonvexe reguläre **Sternkörper** bilden, die so genannten *Kepler-Poinsotschen Körper*.

kleines Sterndodekaeder
12 Pentagramme

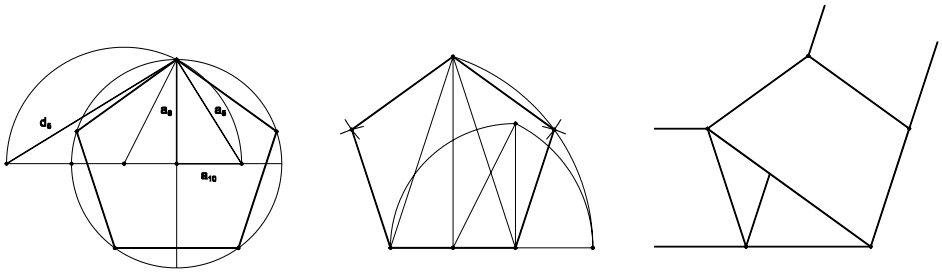
großes Sterndodekaeder
12 Pentagramme



großes Dodekaeder
12 Fünfecke

großes Ikosaeder
20 Dreiecke

Zirkel und Lineal



Quadrate sowie reguläre Dreiecke und Sechsecke lassen sich leicht mit *Zirkel und Lineal* konstruieren. Die Konstruktion eines regulären Fünfecks ist vielleicht nicht ganz so einfach, aber doch möglich. Kann man also *jedes* reguläre Vieleck konstruieren? Nein! Es gibt z.B. *keine* Möglichkeit, ein reguläres Siebeneck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Carl Friedrich **Gauß** (1777 - 1855) konnte zeigen, dass im Wesentlichen nur jene Vielecke konstruierbar sind, deren Eckenzahl n durch die Formel

$$\mathbf{n} = \mathbf{2}^{\mathbf{2^k}} + 1$$

für k = 0, 1, 2, 3, … gegeben ist - also reguläre 3-ecke, 5-ecke, 17-ecke, 257-ecke usw.

Doch warum die Beschränkung auf die Werkzeuge *Zirkel und Lineal* (womit übrigens ein Lineal ohne Skala gemeint ist)? Letztlich geht diese Wahl der Werkzeuge auf **Euklid** (4. Jh. v. Chr.) zurück, der seine *Elemente* mit einer Reihe von *Definitionen, Postulaten* und *Axiomen* beginnt - Forderungen, die einer Beschränkung auf Zirkel und Lineal gleichkommen. Und Euklids Autorität wurde lange Zeit nicht in Frage gestellt.

Diese Einschränkung bringt es mit sich, dass nur bestimmte Aufgaben konstruktiv lösbar sind. In der Antike wusste man darüber noch nicht Bescheid, es gab jedoch drei besondere geometrisch *unlösbare* Aufgaben, die als die *drei Probleme der Antike* bekannt sind:

- **Winkeldrittelung**
  Wie lässt sich ein beliebiger Winkel in drei gleiche Teile teilen?
  Für einige Sonderfälle ist diese Konstruktion zwar möglich, nicht aber für beliebige Winkel.
- **Würfelverdoppelung**
  Wie lässt sich ein Würfel konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das eines gegebenen? Hier ist das Problem, dass beim Volumen dritte Potenzen vorkommen.
- **Quadratur des Kreises**
  Wie lässt sich ein Kreis in ein flächengleiches Quadrat verwandeln?
  Alle Lösungsversuche scheitern an der Unmöglichkeit, π zu konstruieren.

Heute spielt das Problem der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal keine so große Rolle mehr. Man kann es umgehen, indem man entweder andere Werkzeuge zulässt oder auch unendlich viele Konstruktionsschritte erlaubt. Außerdem können wir heute geometrische Probleme auch rechnerisch lösen.

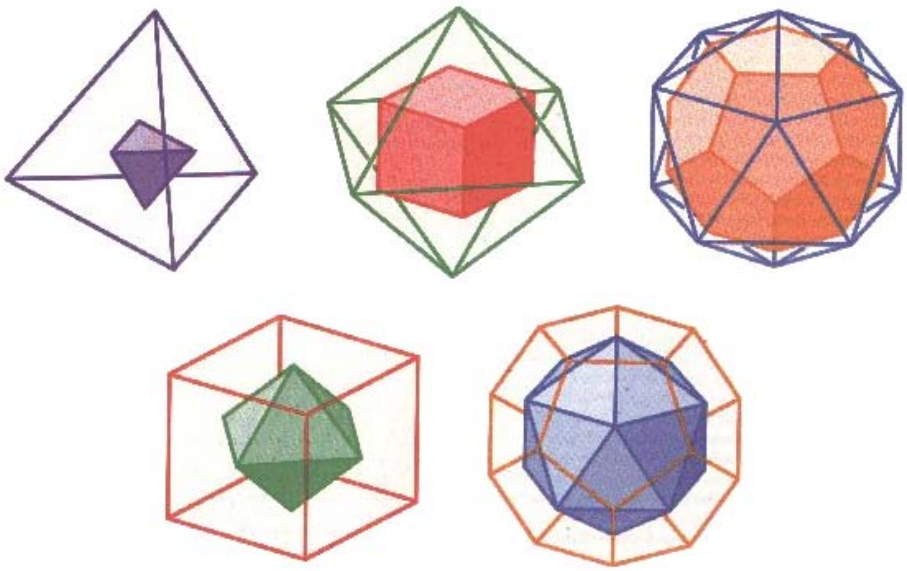
Dualität

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Betrachtet man für alle Platonischen Körper jeweils die Anzahl ihrer Ecken und Flächen, so fällt auf, dass manche dieser Zahlen gleich sind - Ecken und Flächen sind in gewisser Hinsicht „austauschbar“. Genauer: Vertauscht man die Anzahl der Ecken mit der Anzahl der Flächen des Polyeders P_1, so erhält man die Werte des Polyedes P_2 und umgekehrt. Man sagt in diesem Fall: P_1 und P_2 sind zueinander **dual**. Es ergeben sich drei Paare:

- Das Tetraeder ist selbstdual.
- Oktaeder und Hexaeder sind dual.
- Ikosaeder und Dodekaeder sind dual.

Dualität hat auch eine geometrische Bedeutung: Verbindet man in geeigneter Weise die Flächenmittelpunkte eines Platonischen Körpers, so erhält man den zum Ausgangspolyeder *dualen* Platonischen Körper. Damit lassen sich duale Platonische Körper ineinander *schachteln*.



Es gibt aber noch eine zweite Methode zur Erzeugung der dualen Körper: Schleift man alle Ecken eines Platonischen Körpers gleichmäßig ab, so bleibt als „Kern“ jeweils der duale Körper übrig. Man erahnt eine unendliche Folge immer kleinerer ineinander steckender Körper.

Übrigens: Neben der Dualität gibt es noch weitere Möglichkeiten, Platonische Körper ineinander zu schachteln. Auch diese Schachtelungen findet man als Beziehungen zwischen den Zahlen der obigen Tabelle wieder.

Anstelle von *Dualität* wird manchmal auch die Bezeichnung *Polarität* verwendet.

Der Eulersche Polyedersatz

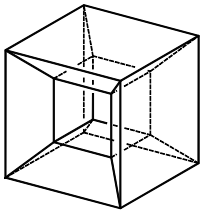
	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Hexaeder	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

Vielecke lassen sich durch die Anzahl ihrer Ecken bzw. Kanten leicht voneinander unterscheiden. Geht das auch bei Körpern? Genauer: Gibt es eine Beziehung zwischen der Anzahl E der Ecken, der Anzahl K der Kanten und der Anzahl F der Flächen eines Körpers analog zur einfachen Formel E = K bei Vielecken? Leonhard **Euler** (1707 - 1783) fand die Formel

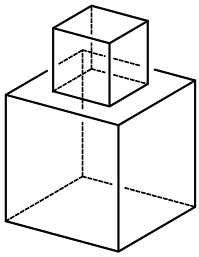
$$E + F = K + 2$$

Eine Probe mit Hilfe der obigen Tabelle zeigt, dass die Beziehung für alle Platonischen Körper stimmt. Gilt sie damit immer?

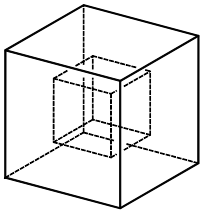
Nein! Es lassen sich Gegenbeispiele finden:



E + F = K + 0



E + F = K + 3



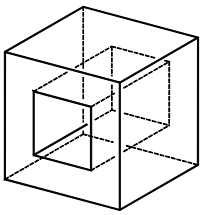
E + F = K + 4

Ist E + F = K + 2 also falsch?

Nein! Wir müssen nur genau die Voraussetzungen formulieren, unter denen die Formel gilt. Erst dadurch erhält man einen mathematischen *Satz*.

- **Satz (Eulerscher Polyedersatz):** Betrachtet man ein Polyeder ohne Tunnel und Löcher mit lauter Seitenflächen ohne Löcher und Durchdringungen, dann gilt für die Anzahl seiner Ecken, Kanten und Flächen: E + F = K + 2

Hat man einen Körper mit $E + F \neq K + 2$, dann erfüllt er *nicht* die geforderten Voraussetzungen. Über einen Körper, der die Voraussetzungen nicht erfüllt, weiß man nichts. Die Formel kann falsch sein, sie kann aber auch stimmen.

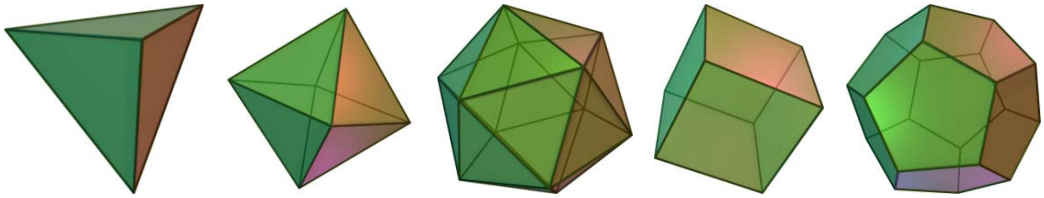


E + F = K + 2

Aufgaben

Körper

- Wie heißen die unten dargestellten Platonischen Körper?

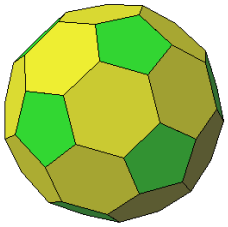


_____ _____ _____ _____ _____

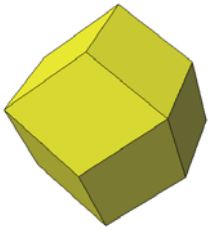
- Ordne die Platonischen Körper nach der Anzahl ihrer *Flächen*.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

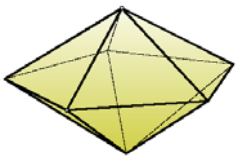
- Gib an, warum die unten dargestellten Körper *keine* Platonischen Körper sind.



_____



_____

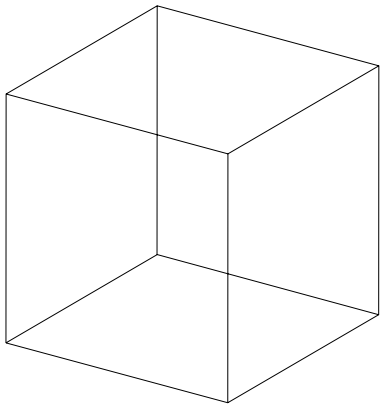


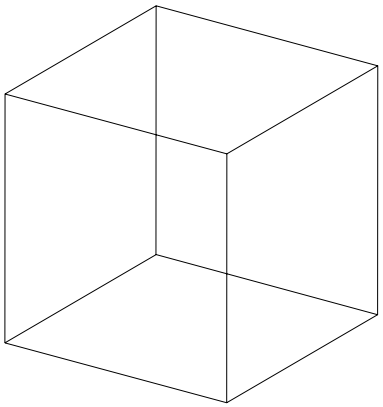
_____

Sichtbarkeit

Die obige Abbildung zeigt ein Detail aus einem der Bilder des holländischen Grafikers **Maurits Cornelis Escher** (1898 - 1972). Wir sehen ein unmögliches Objekt! Doch wie ein dargestellter Körper dem Betrachter erscheint, hängt davon ab, welche Kanten besonders hervorgehoben bzw. *stark ausgezogen* werden.

- Gegeben sind zwei Skizzen eines Würfels. Ziehe seine Kanten so aus, dass er dem Betrachter einmal in **Obersicht** (von oben) einmal in **Untersicht** (von unten) erscheint. Bemale jeweils die Fläche, die am weitesten **vorne** liegt.



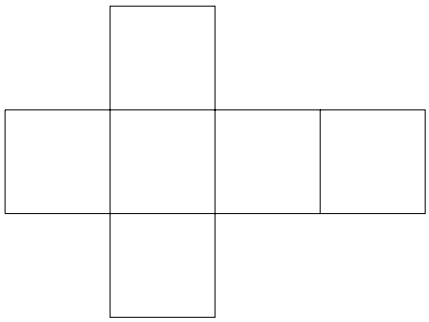


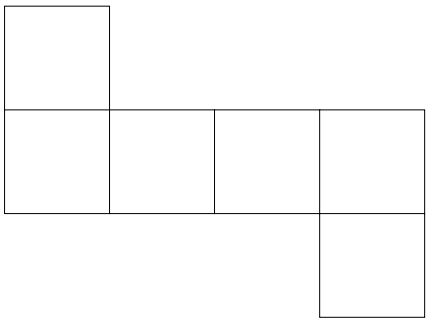
- Nimm ein Blatt Papier und skizziere selbst einen Würfel.
  Kannst du auch einen „unmöglichen Würfel“ zeichnen, wie er in Eschers Bild zu sehen ist?

- Wie sieht ein Würfel aus, wenn er nicht auf einer seiner Flächen ruht, sondern mit einer seiner Kanten oder Ecken den Boden berührt?
  Nimm ein Blatt Papier und versuche, einen Würfel auch in diesen Positionen zu skizzieren.

- Welchen Umriss hat ein Würfel, der mit einer seiner Ecken den Boden berührt, genau von oben gesehen? Übrigens: Der Umriss in der Darstellung eines Körpers ist immer sichtbar.

Netze

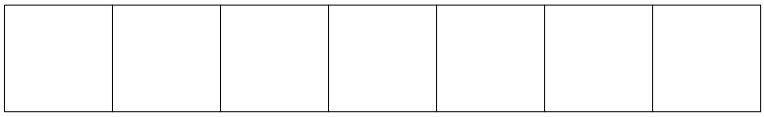


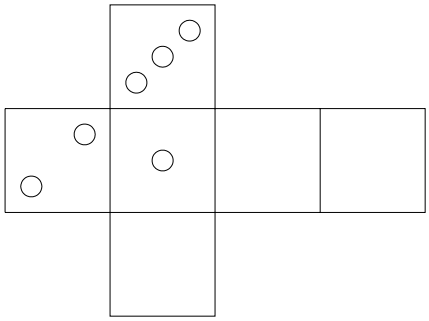


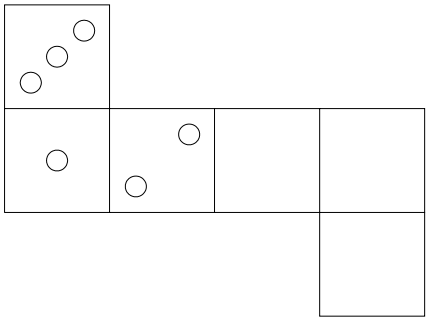
- Oben siehst du zwei **Netze**, aus denen man jeweils einen Würfel falten kann.
  Doch wie viele *verschiedene* Netze eines Würfels gibt es? Nimm ein Blatt Papier und skizziere alle Netze, die du findest. Netze, die bis auf Drehung und / oder Spiegelung gleich sind, werden nur einmal gezählt.

- Wie viele verschiedene Netze hat ein Tetraeder bzw. ein Oktaeder? Nimm ein Blatt Papier und skizziere alle Netze, die du findest. Netze, die bis auf Drehung und / oder Spiegelung gleich sind, werden nur einmal gezählt.

- *Keine* Scherzfrage: Kann man einen Würfel aus sieben Quadraten nebeneinander falten?

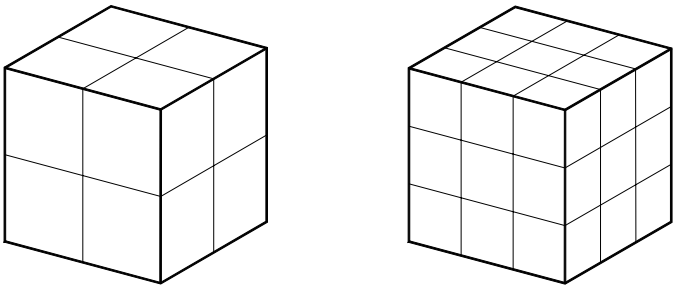




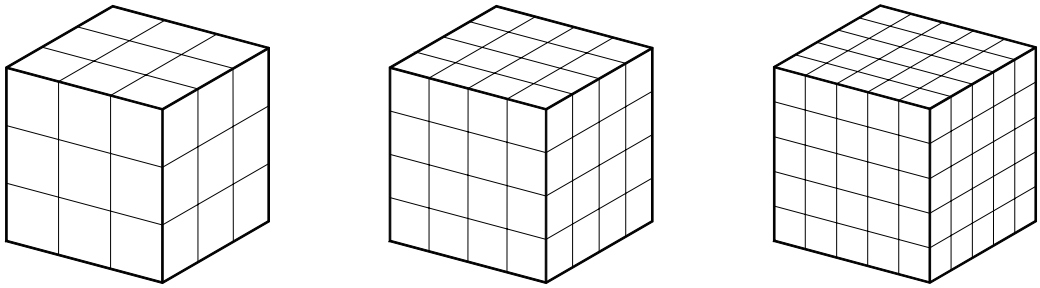


- Ergänze die oben dargestellten Netze wie bei Spielwürfeln üblich, d.h. so, dass die Summe der Punkte auf gegenüber liegenden Flächen immer 7 ergibt.
- Wie viele verschiedene „Beschriftungen“ eines Spielwürfels dieser Art kann es geben? Die Orientierung der „asymmetrischen“ Flächen (2, 3, 6) soll dabei keine Rolle spielen.

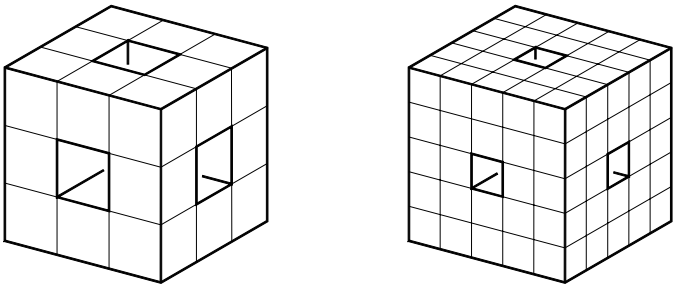
Färbungen



- Wie sind die 8 kleinen Würfelchen eines 2×2×2 Würfels rot und grün zu bemalen, um mit ihnen sowohl einen roten als auch einen grünen Würfel zusammensetzen zu können?
- Kannst du die Frage auch für einen 3×3×3 Würfel und drei Farben beantworten?

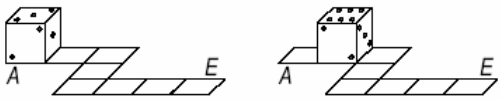


- Ein Würfel, der aus 3×3×3 kleinen Würfelchen zusammengesetzt ist, wird außen auf allen sechs Seiten blau bemalt. Wie viele der kleinen Würfelchen haben dann 0 / 1 / 2 / 3 blaue Flächen?
- Kann eines der kleinen Würfelchen auch mehr als 3 blaue Flächen haben?
- Kannst du die Frage auch für einen 4×4×4, 5×5×5, …, n×n×n Würfel beantworten?



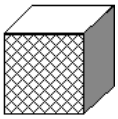
- Aus einem 3×3×3, 5×5×5, 7×7×7, … Würfel wird das „Mittelkreuz“ entfernt und das Restgebilde anschließend in blaue Farbe getaucht. Erstelle eine Übersicht, wie viele der kleinen Würfelchen dann wie viele blaue Flächen haben.

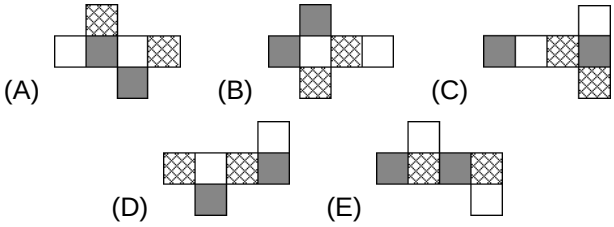
Bewegungen



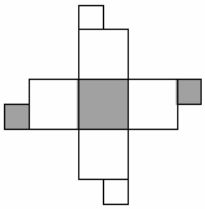
- Ein Spielwürfel „rollt“ wie abgebildet von A nach E. Zu Beginn sieht man drei Punkte auf der oberen Fläche des Würfels. Wie viele Punkte sieht man dort am Ende?

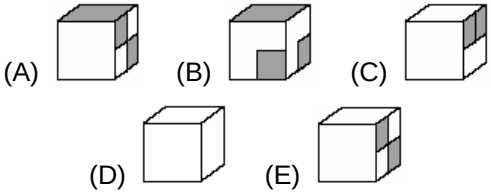
- Jede der 5 unten abgebildeten Figuren besteht aus 6 Quadraten und kann zu einem Würfel zusammengeklebt werden. Welche Figur liefert einen Würfel, bei dem gegenüberliegende Flächen immer gleich gefärbt sind?



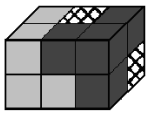


- Welcher der unten dargestellten Würfel wurde aus dem Netz links gefaltet?

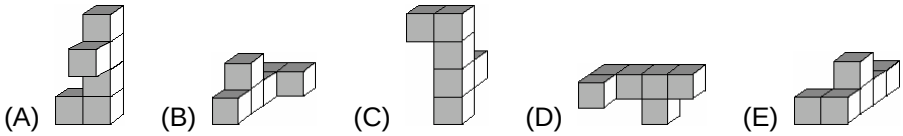




- Ein Quader besteht aus drei Teilen, von dem jeder aus 4 Würfeln besteht. Von zwei Teilen kann man alle 4 Würfel sehen. Wie sieht der dritte (schwarz-weiß gemusterte) Teil aus?

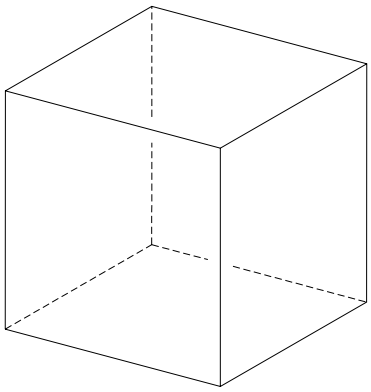


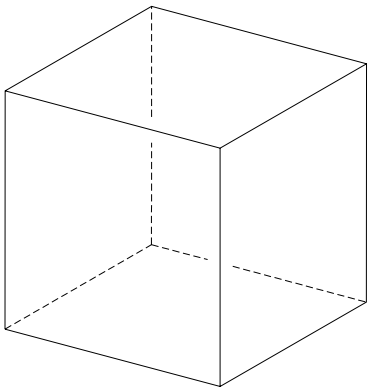
- Welcher Teil unterscheidet sich von den übrigen?



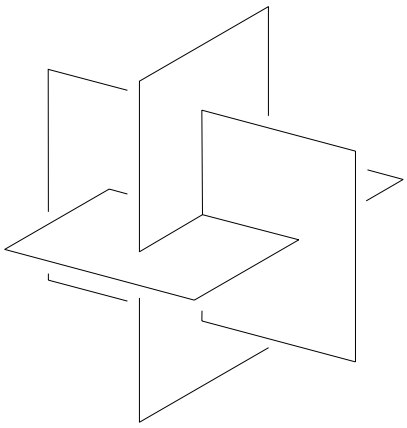
Platonische Körper

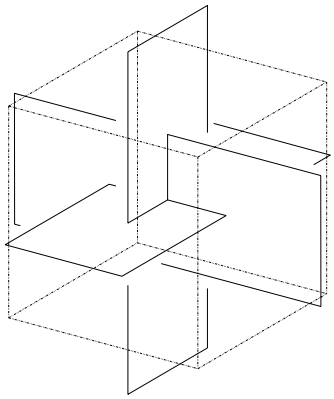
- Schreibe den skizzierten Würfeln a) ein Oktaeder, b) ein Tetraeder ein.





- Stelle mit Hilfe der skizzierten „Gerüste“ a) ein Ikosaeder, b) ein Dodekaeder dar.

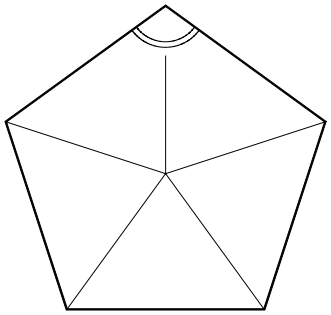




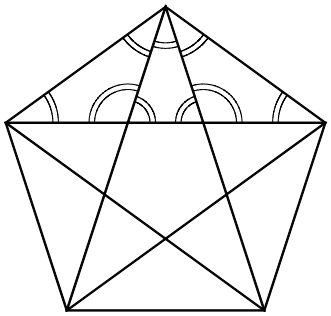
- Wie viele Ecken, Kanten und Flächen haben die Platonischen Körper?
  Ergänze die folgende Tabelle.

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder			
Hexaeder			
Oktaeder			
Dodekaeder			
Ikosaeder			

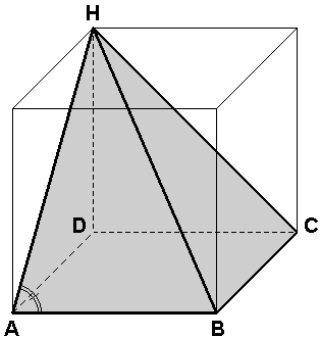
Winkel



- Wie groß ist der Innenwinkel eines regulären Fünfecks?
- Kannst du die Frage auch für ein reguläres n-eck beantworten?



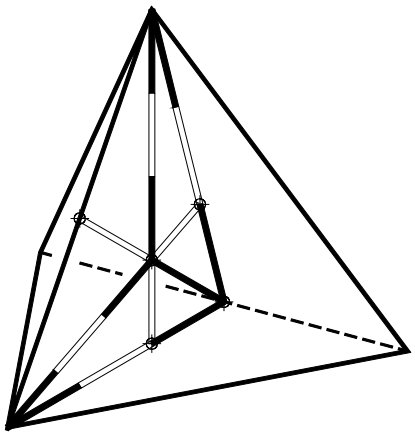
- Wie groß sind die oben eingezeichneten Winkel?



- Welchen Winkel schließen die Pyramidenkanten AB und AH ein?
  Wie kannst du deine Antwort begründen?
- Wie viele derartige Pyramiden passen in den Würfel?
  Wie kannst du deine Antwort begründen?

Tetraeder

- Welche Teilverhältnisse kannst du aus der folgenden Zeichnung ablesen?
  Formuliere Sätze wie: *Der Mittelpunkt (Schwerpunkt) eines regulären Dreiecks teilt die Verbindung eines Eckpunktes mit dem gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt im Verhältnis …*



- .....
- .....
- .....

- Gegeben ist ein reguläres Tetraeder mit Kantenlänge a.
  a) Berechne die Höhe h eines regulären Dreiecks.
  b) Berechne die Körperhöhe H eines regulären Tetraeders.
  c) Berechne den Abstand d gegenüberliegender Seitenkanten.

  Hinweis: Für alle Berechnungen brauchst du den **pythagoreischen Lehrsatz**.

- Wie lauten die Formeln für Volumen und Oberfläche eines regulären Tetraeders?

Anhang

Literatur

- Paul **Adam**, Arnold **Wyss:** Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde. Bern / Stuttgart 1994 (2. Aufl.) <Haupt / Verlag freies Geistesleben>
- Albrecht **Beutelspacher**, Bernhard **Petri:** Der Goldene Schnitt. Mannheim, Wien, Zürich 1988 <BI Wissenschaftsverlag>
- Brian **Bolt:** Eine Mathematische Fundgrube. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig 1987 (1. Aufl.) <Klett>
- Brian **Bolt:** Die zweite Mathematische Fundgrube. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig 1989 (1. Aufl.) <Klett>
- Brian **Bolt:** Die dritte Mathematische Fundgrube. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig 1993 (1. Aufl.) <Klett>
- Wilhelm **Kuehs:** Die Thrud. Wolfsberg 1993 <Edition Wolfsberg im Tandaradei Verlag>
- Ingrid **Lewisch**, Alfred S. Posamentier: Mathematisches Fachwörterbuch. Wien 1996 <Oldenbourg>
- Rüdiger **Thiele:** Das große Spielvergnügen. München / Leipzig 1984 <Hugendubel / Urania>
- Hans **Walser:** Der Goldene Schnitt. Stuttgart, Leipzig / Zürich 1993 <B. G. Teubner / Verlag der Fachvereine>
- Josef **Wittmann:** Mathematische Tricks und Basteleien. Köln 2001 <Aulis Verlag Deubner>

Internet

- Egon **Gottwein:** Systematische Grammatik der griechischen Sprache. Numeralia.
  http://www.gottwein.de/GrGr/GGrNum01.php
  (29.07.2006)

- Stefan **Hartmann:** Rahmenprogramm zur Kunstausstellung. Platonische Körper.
  http://www.caesar.de/uploads/media/platon.pdf
  (15.02.2006)

- Richard **Klein:** Spiele als Zugang zur Polyedergeometrie.
  http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/student/klein/diplomarbeit_klein.pdf
  (20.02.2006)

- Wolfram **Koepf:** Fußbälle, platonische und archimedische Körper.
  http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Vortrag/Fussball.pdf
  (24.02.2006)

- Jürgen **Köller:** Mathematische Basteleien.
  http://www.mathematische-basteleien.de/
  (29.07.2006)

- Matthias **Ludwig:** Durchdringungskörper in der Raumgeometrie.
  http://mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/muheft6/durchdringungen/Durchdringungskoerper2.pdf
  (02.08.2006)

- Dieter **Ortner:** Die fünf Platonischen Körper und warum es keine eckigen Seifenblasen gibt.
  http://www.zebis.ch/inhalte/unterricht/mathematik/polyeder.pdf
  (16.02.2006)

- Michael **Rockstroh:** LernUmgebung Platonische Körper.
  http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/Platon.htm
  (24.02.2006)

- **wikipedia.org:** Platonische Körper / Spielwürfel
  http://de.wikipedia.org/wiki/Platonische_K%C3%B6rper
  http://de.wikipedia.org/wiki/Spielw%C3%BCrfel
  (29.07.2006)

- Daniela **Ziegler:** Spiele und Spielzeug in der Antike.
  http://www.klassischearchaeologie.phil.uni-erlangen.de/realia/spiele/spiele.html
  (29.07.2006)

Internet

- Reimund **Albers:** Quicktime Movies.
  http://www.mevis.de/~albers/Materialien/
  (24.02.2006)

- Rüdiger **Appel:** GIF Animationen.
  http://www.3quarks.com/GIF-Animations/PlatonicSolids/index-de.html
  (20.02.2006)

- Wolfgang **Appell:** Applets.
  http://home.fonline.de/fo0126/geometrie/geo57.htm
  http://home.fonline.de/fo0126/geometrie/geo58.htm
  (20.02.2006)

- Walter **Fendt:** Applet.
  http://www.walter-fendt.de/m14d/platon.htm
  (20.02.2006)

Bilderquellen

- **Die Platonischen Körper**
  Abbildungen des Autors

- **Platon**
  http://www.phil.uni-erlangen.de/~p1altar/photo_html/portraet/griechisch/denker/platon/platon.html

- **Johannes Kepler**
  Microsoft Encarta Enzyklopädie Professional 2005
  http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/kepler1.gif
  http://www.caesar.de/uploads/media/platonische_koerper.jpg

- **Griechische Fremdwörter**
  http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/Platon.htm

- **Spielwürfel**
  http://www.klassischearchaeologie.phil.uni-erlangen.de/realia/spiele/spiele2.html
  http://www.derbackgammonfreund.de/bilder/SumerianBoard2.jpg
  http://www.institut-fuer-kreiselforschung.de/wuerfel/wuerfel.jpg
  http://www.schulbank.de/special-geld/images/pic/muschel.gif
  http://www.knochenschnitzerei.de/stabwuerfel.jpg
  Abbildung des Autors
  http://www.schule.suedtirol.it/blikk/angebote/spielmathe/images/wuerfel.jpg
  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/3/31/Rubikscube-2er3er4er.jpg
  http://www.blargg.com/images/cube1.jpg
  http://www.coolest-gadgets.com/wp-images/3dsudukp.jpg
  http://www.echt-wahnsinn.de/bilder/Eifomer1.jpg

- **Natur**
  http://geomuseum.tu-clausthal.de/minerale.php
  http://www.mineralien-basel.ch/images/Binntal/3anatasmagnetit.jpg
  http://www.chemie-master.de/pse/Co_cobaltin.jpg
  http://geomuseum.tu-clausthal.de/mineralogie/minerale/images/G750x500/pyrit_p010_g.jpg
  http://www.eluniversitarioeuropeo.es/gprensa/web/img/Copia%20de%20Icos-Nature-Virus-HepatitisC2.jpg
  http://www-ocean.tamu.edu/Quarterdeck/QD5.2Graphics/b.bigelowi-lg.gif
  http://microscope.mbl.edu/baypaul/microscope/images/t_imgAZ/circogoniaicosahedra_ekw.jpg

- **Kunst**
  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Leonardo_da_Vinci_%281452-1519%29_-_The_Last_Supper_%281495-1498%29.jpg
  http://dali.urvas.lt/forviewing/pic01.jpg
  http://home.cc.umanitoba.ca/~gunderso/model_photos/da_vinci/open_faced_platonic_solids/platonic_06.jpg
  http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/pic/polyeder/escher-kubus-800.jpg
  http://fotos.pere.net/escher/stars.jpg

- **Die Anzahl 5**
  http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
  Abbildungen des Autors

- **Archimedische Körper**
  http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/Platon.htm

Bilderquellen

- **Sternformen**
  http://members.xtel.at/amba/penta8.gif
  http://www.piercethings.de/shop/images/(K)Drudenfuss.jpg
  http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/Platon.htm

- **Zirkel und Lineal**
  Abbildungen des Autors

- **Dualität**
  http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Geometrie_GS/Bilder/plato3.jpg

- **Der Eulersche Polyedersatz**
  Abbildungen des Autors

- **Körper**
  http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid
  http://home.fonline.de/fo0126/geometrie/geo58.htm
  http://www.geometrie.tugraz.at/roeschel/Platonische_Polyeder_Uebersicht.pdf

- **Sichtbarkeit**
  http://haegar.fh-swf.de/spielwiese/unmoeglicheObjekte/bilder/wuerfel.jpg
  Abbildungen des Autors

- **Netze**
  Abbildungen des Autors

- **Färbungen**
  Abbildungen des Autors

- **Bewegungen**
  Känguru der Mathematik 2005 / 2004 / 2005 / 2003 / 2001

- **Platonische Körper**
  Abbildungen des Autors

- **Winkel**
  Abbildungen des Autors

- **Tetraeder**
  Abbildungen des Autors